Neobvyklé reprezentace reálných čísel

Ondřej Váňa[1], Jan Hudeček[2], Michal Till[3] a Martin Popel[4]

[1] Gybu - Praha
[2] Gymnázium Voděradská
[3,4] Gymnázium Nad Alejí

Úvod

Naše skupina se zabývala dvěma miniprojekty: generátory pseudonáhodných čísel a neobvyklými reprezentacemi reálných čísel. O generátorech pseudonáhodných čísel si můžete přečíst v příspěvku skupiny, která se tématu věnovala po oba dva dny.

Miniprojekt

Kromě číselných soustav s celočíselným(2 – binární ,10 – decimální ,16 - hexadecimální) základem, které jsou běžné, existují i soustavy s reálným základem. My jsme studovali vlastnosti soustavy se základem zlatého řezu ($\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}62$ jako jeden z kořenů rovnice $x^2=x+1$, dále jen soustava τ).

Celočíselné soustavy	Soustava τ
1+1=2	1+1=10,01
11=11	11=100
101+10=111	101+10=1001
$\tau+\tau=2\tau$	$\tau+\tau=\tau^2+1/\tau$

V soustavě o základu 10 se každé číslo dá napsat jako

$$x = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 10^0 + \ldots a_{-j}10^{-j}$$

např.: $123{,}4 = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 + 4\cdot 10^{-1}$

obdobně můžeme vyjádřit čísla i v ostatních soustavách s celočíselným základem.

Soustava τ

V této soustavě můžeme také zapsat číslo ve tvaru:

$$x = a_k\tau^k + a_{k-1}\tau^{k-1} + \ldots + a_1\tau + a_0\tau^0 + \ldots a_{-j}\tau^{-j}$$

$$101{,}01 = 1\cdot\tau^2 + 0\cdot\tau^1 + 1\cdot\tau^0 + 0\cdot\tau^{-1} + 1\cdot\tau^{-2}$$

Pokud se v zápisu vyskytnou dvě jedničky za sebou (11) je nutné tento řetězec rozepsat jako 100. To vychází z rovnice: $\tau^2=\tau+1$. Obecně se řetězec 11 považuje za zakázaný rozvoj a je nutné jej vždy nahradit.

Tato soustava má některé pozoruhodné vlastnosti.

Soustavy s celočíselným základem	Soustava τ
Čísla s ukončeným rozvojem mají jednoznačný zápis	Ne (11=100)
Součet dvou celých čísel je celé číslo	Ne (1+1=10,01)
Vzdálenost mezi jakýmikoli dvěma sousedními celými čísly je na číselné ose vždy stejná.	Ne jsou dvě různé (A=1 a B=1/τ) *

* Vezmeme si posloupnost celých čísel (0,1,10,100,101,1000,1001…)v soustavě τ a rozdíly mezi dvěmi sousedními čísly zapíšeme jako posloupnost (ABA AB ABA…).Stejnou posloupnost získáme aplikováním substitučních pravidel (A=>ABA a B=>AB) na řetězec A. Bližší informace o této zajímavé substituční metodě získáte z příspěvku o generátorech náhodných čísel.

Počítání s touto soustavou

3+2=5 aneb v soustavě τ

100,01
+10,01

110,1001 => 1000,1001(oprava zakázané sekvence)

pravidla pro počítání(a,b jsou celá čísla, m,n jsou racionální čísla):

-součet: (a+bτ)+(c+dτ)=(a+c)+(b+d)τ

-součin: (a+bτ)(c+dτ)=(ac+bd)+(ad+bc+bd)τ

-podíl: $\frac{a+b\tau}{c+d\tau}\frac{c+d\tau}{c+d\tau}=(m+n)\tau$

Využití

- Modelování kvazikrystalů
- Generátory náhodných čísel
- Neztrátové uchování iracionálních čísel v počítači (ve tvaru a+bτ)