CHAOTICKÁ DYNAMIKA

Tomáš Jakoubek, Gymnázium a SPgŠ Liberec, loony@seznam.cz
Zdeněk Růžička, Masarykovo gymn. Příbor, tramtara@seznam.cz
Vojtěch David, Gymn. Ch. Dopplera Praha, vojta.david@seznam.cz
Hana Matoušová, Gymn. A. Jiráska Litomyšl,
hhanulka@hotmail.com

Supervisor: Ing. Vojtěch Svoboda

Abstrakt:

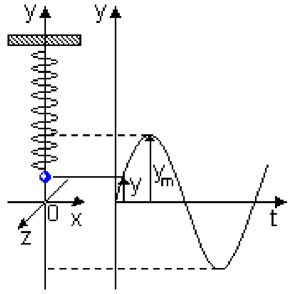
Pozorovali jsme regulérní chování systémů, přechody z regulérního chování do chaotického a chaotické chování systémů.

Pracovali jsme s počítačovými programy Double Pendulum (simulace pohybu dvojitého kyvadla) a Chaos Generator (simulace RCL obvodu se zapojenou součástkou x^2, která zapříčiňuje chaotické chování systému).

1 Úvod

Budoucí stavy některých systémů lze předpovědět ze znalosti stavu okamžitého (např. kmitání pružiny, malý elektrický obvod). My jsme se však zabývali simulováním dvou systémů, které se po překročení určitých hodnot začali chovat chaoticky, jejich budoucí vývoj byl nepředpověditelný.

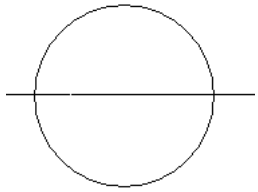
Dynamický systém - systém, jehož stav se s časem mění (např.počasí). Stav systému v daném momentu udávají okamžité hodnoty stavových veličin. Pokud chceme předpovědět, jak bude systém vypadat v následujících chvílích, musíme znát tyto hodnoty. Pokud známe stav systému v nějakém momentu, dokážeme na základě znalostí fyzikálních pohybových zákonů předpovědět jeho stav v budoucnosti a též zjistit, jaký byl jeho stav v minulosti.
Stav dynamického systému je dán souřadnicí bodu ve fázovém prostoru. Pohyb tohoto bodu je dán pohybovými rovnicemi, které jsou pro složitější systémy zadány soustavou diferenciálních rovnic. Pro jednoduché Newtonovými poh.zákony. Jednoduchým systémem je např.pružina :

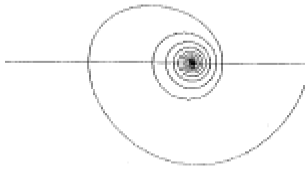


$y = y_m \sin \omega \,.\, t$ (okamžitá výchylka, průběh podle fce sinus)

$v = B \cos \omega \,.\, t$ (okamžitá rychlost, průběh podle fce kosinus)

závislost v na y :
pro netlumený pohyb pro tlumený pohyb



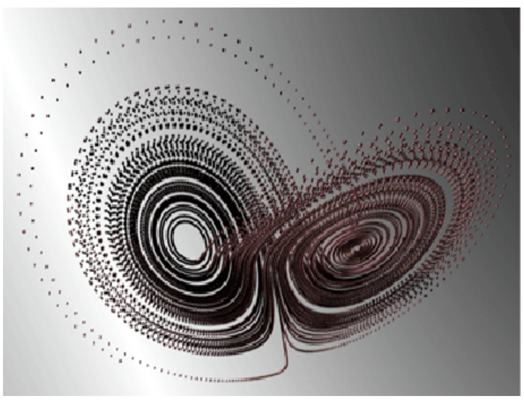


Grafy závislosti v na y pro složitější (námi pozorované) systémy budou uvedeny později.

Dynamický systém může být deterministický nebo stochastický (náhodný). Deterministický dynamický systém lze poměrně přesně popsat, zatímco u systému stochastického jsme odkázáni pouze na statistické vlastnosti takového systému (například střední hodnota, směrodatná odchylka a jiné).

Chaos - chaotické chování systému nastává v okamžiku, kdy se systém nechová podle předpovědi respektive je naše předpověď nedostatečně přesná v důsledku velké citlivosti na počáteční podmínky. Chaos může nastat v systému, který má více než dvě stavové proměnné (např. v trojrozměrném prostoru).

V minulosti byla tendence připisovat malé nevysvětlitelné nepravidelnosti pozorovaných jevů nepřesnosti přístrojů, šumu, náhodným vlivům...Myslelo se, že malá změna počátečních podmínek vyvolává malé změny chování systému v budoucnu. Předpokládala se prediktabilita chování systému. Počátkem 19.století francouzský vědec Laplace došel k názoru, že všechny události jsou jednou provždy určeny - determinovány. Domníval se, že existuje soubor vědeckých zákonů, jejichž znalost nám umožní předpovědet všechno, co se ve vesmíru v budoucnosti odehraje. Stačí k tomu dokonale poznat stav vesmíru v určitém časovém okamziku. Poincaré jako první ve svých spisech naznačil jistou nepředvídatelnost dynamiky. V 60.letech 20.století objevil E. Lorenz jev, který byl později pojmenován jako efekt motýlích křídel : pokud někde na planetě existuje stav počasí takový, že možnost bouřky a klidu je naprosto stejná, stačí malé zamávnutí motýla křídly k tomu, aby se situace přiblížila k jedné nebo ke druhé možnosti => i pro velmi malé rozdíly v počátečních podmínkách jsou výsledné stavy diametrálně odlišné. Analogický je příklad osla, který vybírá ze dvou naprosto stejných kupek sena. Chování osla zobrazuje Lorenzův atraktor (obr. 1)

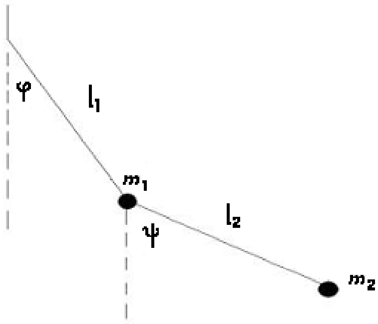


Osel krouží chaoticky kolem jedné i druhé, aniž by si některou vybral. Kupky sena označujeme jako atraktory. Atraktor dynamického systému je stav, do kterého systém směřuje. Jsou-li atraktorem dynamického systému pevné body, jde o nejjednodušší případ.

Obr. 1: Lorenzův atraktor

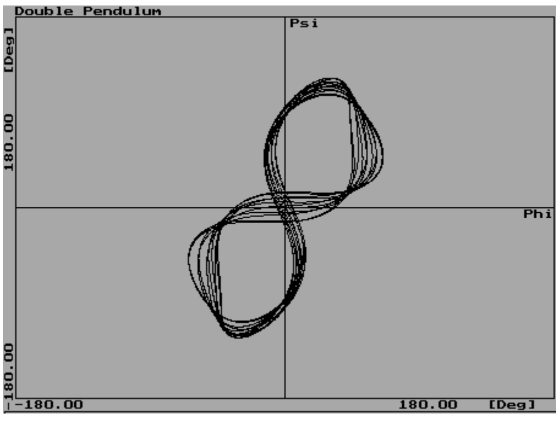
2 Zkoumané systémy

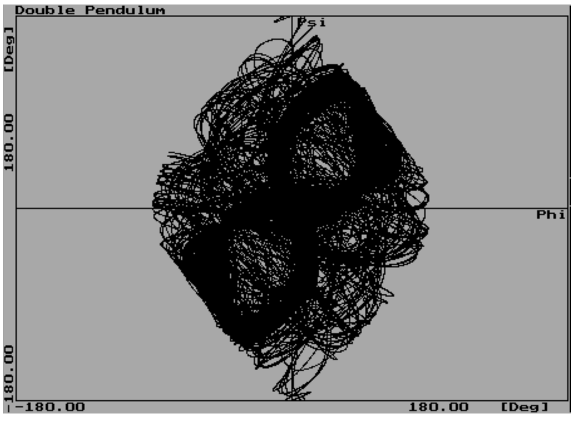
A. Dvojité kyvadlo



Chování systému (určeného hmotnostmi závažích $m_1 = m_2 = 1$kg a délkami závěsů $l_1 = l_2 = 1$m) závisí na 4 proměnných: počátečních úhlech φ, ψ a počátečních úhlových rychlostech φ', ψ' (1. derivace φ, ψ). Po zadání proměnných program nasimuluje chování ve zvolené soustavě. Volili jsme soustavy: závislost φ na ψ (vyjádření trajektorie pomocí těchto úhlů) a Poincarého řez (proložení stavového prostoru rovinou a sledování průniků bodu, určujícího stav systému, touto rovinou).
Obr. 2

Trajektorie kyvadla pomocí φ a ψ. Počáteční hodnoty pro obr. 3a: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi' = 4{,}45\text{s}^{-}1$ a $\psi' = 0$. Pro obr. 3b: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi' = 4{,}47\text{s}^{-1}$ a $\psi' = 0$. Na obr. 3a se systém chová nechaoticky, na obr. 3b chaoticky. Pro hodnotu $\varphi' = 4{,}46\text{s}^{-1}$ se zpočátku systém chová jako na obr. 3a, po nějaké době však přejde do chaotického pohybu. Tuto hodnotu můžeme považovat za hraniční.

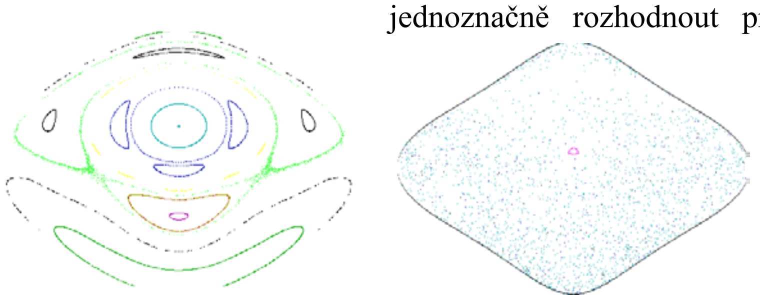


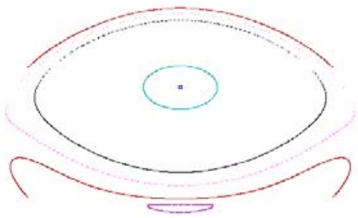


Obr. 3a

Obr. 3b

Proložení stavového prostoru rovinou (Poincarého řez), charakterizovanou φ' a φ. Před začátkem simulace bylo nutno zadat hodnotu celkové energie kyvadla. Obrazce soustředěné kolem nějakého bodu (atraktoru) značí nechaotický pohyb, roztroušené tečky znamenají chaos – systém se nemohl jednoznačně rozhodnout pro určitý atraktor.

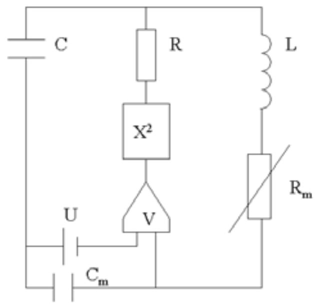




Obr. 4a: E=4J Obr. 4b: E=10J

Obr. 4c: E=25J

B. Nelineární elektrický obvod



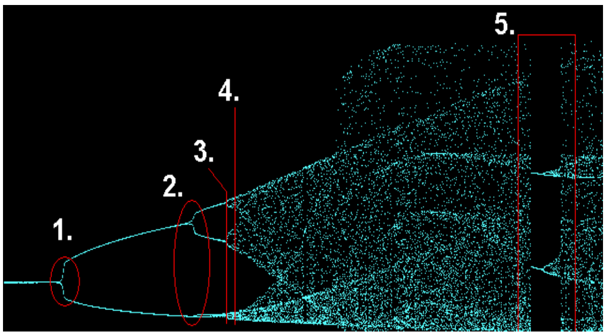
Na obrázku 5 máme jednoduchý RCL obvod. Pracovali jsme se simulačním programem Chaos generator, do kterého jsme zadali konstantní hodnoty: v=1,2μV, R=3300Ω (3200Ω, 2000Ω), C=47nF, C_m=47nF, L=0,1H a U_0=4V. V obvodu je zabudována součástka x^2, která má na výstupu kvadrát vstupního napětí. Díky této součástce můžeme pozorovat chaotické chování obvodu pro různé hodnoty R_m. Toto chování jsme pozorovali na fázovém a bifurkačním diagramu.

Obr. 5

Pro hodnotu R=3300Ω:

1. $R_m \in (+\infty;218\rangle\Omega$ byl naměřen jednoduchý lineární průběh U.
2. $R_m \in (218;143{,}6\rangle\Omega$ byly naměřeny dvě maximální hodnoty U.
3. $R_m \in (143{,}6;128{,}1\rangle\Omega$ naměřeny čtyři max. hodnoty U.
4. $R_m \in (128{,}1;125{,}1\rangle\Omega$ - osm max. hodnot U.
5. Pro hodnoty $R_m \in (125{,}1;0\rangle\Omega$ nastává v soustavě CHAOS.

   - ovšem bylo zjištěno, že i pro určité $R_m \in (125{,}1;0\rangle\Omega$ dostává soustava nechaotických maximálních hodnot U. Největší mezera nastává pro hodnoty $R_m \in \langle 50{,}350;44{,}862\rangle\Omega$ (na obr.6 položka 5).



Obr. 6: postupný vývoj U

1.- přechod do první bifurkační zóny

2.- rozdělení do čtyř max. hodnot U

3.- do osmi max. hodnot U

4.- nastává chaos

5.- hlavní mezera v chaosu

Pro hodnotu R=3200Ω:

Pro tuto hodnotu již nebyly změřeny všechny fáze, ale jen interval mezery bez chaosu - $R_m \in (80;75\rangle\Omega$.

Poznámka: mezer bylo naměřeno více, ale jen tato byla zaznamenána jako hlavní.

Pro hodnotu R=2000Ω:

Pro tuto hodnotu byla zjištěna první bifurkace již při R_m=422Ω a hlavní mezera v chaosu při $R_m \in \langle 273;247 \rangle \Omega$.

3 Shrnutí

Systémy přecházejí z regulérního chování do chaotického velmi náhle. Zvláště těmto přechodům jsme věnovali svou pozornost. Chování systémů nás často překvapovalo (viz. obr. 6 položka 5: díra v chaosu). Obor chaotické dynamiky není dodnes zcela prozkoumán (to čeká na nás…). Jeho poznatky jsou aplikovány v biologii, meteorologii jakožto i v neexaktních oborech, jako je psychologie a sociologie.

Poděkování

Nejvíce děkujeme Vojtovi Svobodovi za poskytnuté informace a čas, který nám věnoval. Naše díky směřujeme samozřejmě také FJFI ČVUT.

Reference:

Korsch H. J., Jodl H.-J.: *Chaos,* Springer-Verlag, 1994