Počítačové generování fraktálních množin

S. Basovník*
J. Fabriková**
H. Kubátová***
J. Šedo****

*Gymnázium Kroměříž
**Gymnázium Brno
***Gymnázium, Olomouc-Hejčín
****SPŠ Jihlava

angwin@centrum.cz (S. Basovník)

Abstrakt:

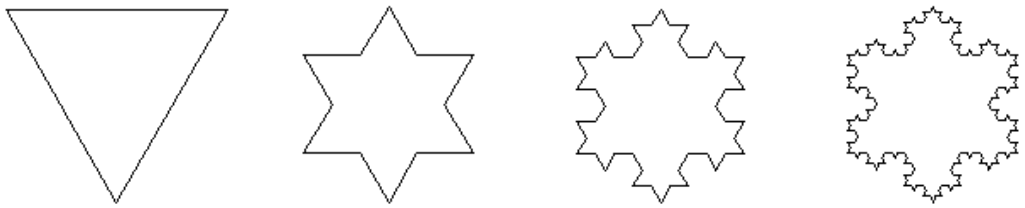
Práce pojednává o nekonečně členitých geometrických útvarech – fraktálech. Tyto objekty se vyskytují v souvislosti s některými nelineárními jevy v oblasti fyziky, chemie, biologie a také společenských věd. Cílem je přiblížit metody generování základních fraktálních množin a jejich zobrazení.

1 Úvod

Fraktál je geometrický útvar, který lze rozdělit na části, přičemž tyto části jsou (alespoň přibližně) zmenšené kopie celého útvaru. Tato vlastnost se často označuje jako *soběpodobnost*. Pomocí fraktální geometrie lze popsat i útvary, které jsou běžnou (Eukleidovskou) geometrií nepopsatelné. Setkáváme se s nimi i v běžném životě – např. povrch plic, list kapradí, mořské pobřeží, tvar mraku, … Prostřednictvím fraktálů lze věrohodně simulovat i velmi složité systémy, jejichž chování závisí na mnoha faktorech (např. vývoj populace, vývoj akcií na burze, předpověď počasí).

2 Příklady jednoduchých fraktálů

Jednou z nejjednodušších fraktálních konstrukcí je Kochové vločka. Vychází z rovnostranného trojúhelníku. Nad prostřední třetinou každé jeho strany vztyčíme opět rovnostranný trojúhelník a úsečku, nad níž jsme ho vztyčovali, smažeme. Tentýž krok opakujeme na každé nově vzniklé úsečce. Po nekonečném počtu opakování vznikne obrazec podobný sněhové vločce (viz. obr. 1) s konečně velkým obsahem, ale nekonečným obvodem.



Obr. 1 Konstrukce vločky Kochové

3 Mandelbrotova množina

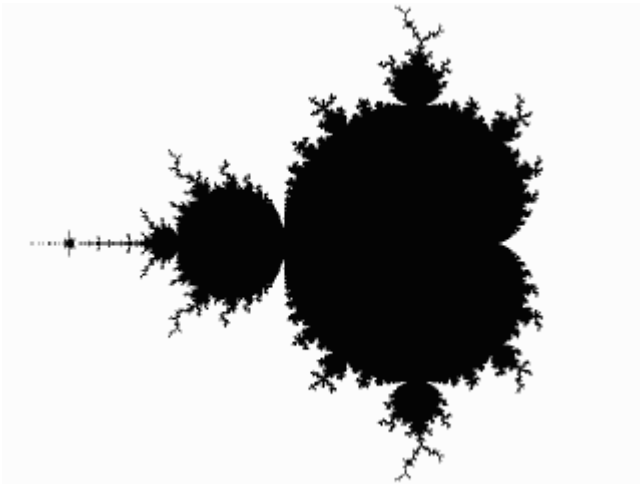
Mezi nejznámější a nejzajímavější fraktály patří Mandelbrotova množina. Je to podmnožina bodů roviny komplexních čísel nacházející se v okolí komplexní nuly. Bod X patří do této množiny právě tehdy, když posloupnost daná předpisem $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (kde $z_0 = 0+0i$ a c je komplexní konstanta udávající souřadnice bodu X), nediverguje. (Každý krok, v němž vypočítáme následující člen posloupnosti, se nazývá iterace.) Je již dokázáno, že posloupnost diverguje, jestliže v průběhu iteračního procesu absolutní hodnota z_n překročí 2. Daný bod pak v Mandelbrotově množině neleží.

Vlastní algoritmus generování této množiny pak vypadá takto:

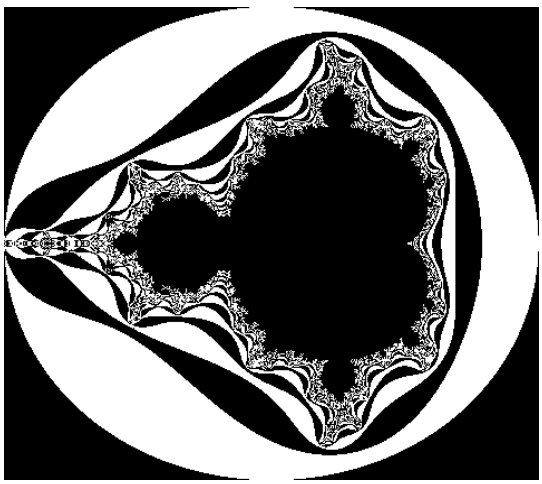
Vstupními parametry jsou komplexní číslo c a konstanta určující maximální počet iterací, se kterými budeme počítat, *MaxIter*.

1. nastav *pocetIteraci* := 0
2. nastav $z := 0$
3. pokud *pocetIteraci* < *MaxIter* prováděj smyčku:
4. nastav $z := z^2 + c$
5. jestliže $|z| > 2$ bod neleží v Mandelbrotově množině; konec
6. nastav *pocetIteraci* := *pocetIteraci* + 1
7. konec smyčky
8. bod leží uvnitř Mandelbrotovy množiny; konec

Samotná Mandelbrotova množina je na obr. 2. Ještě zajímavější útvar však vznikne, pokud body ležící mimo tuto množinu obarvíme podle toho, po kolika iteracích přesáhla příslušná hodnota z_n hranici 2 (viz obr. 3).

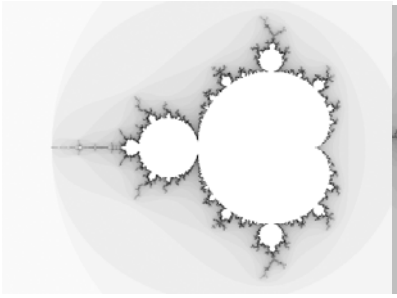


Obr. 2

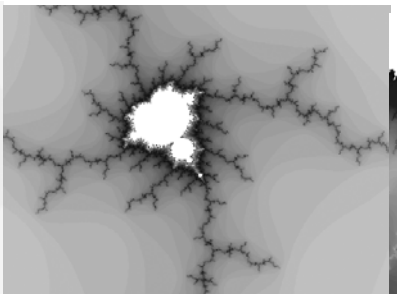


Obr. 3

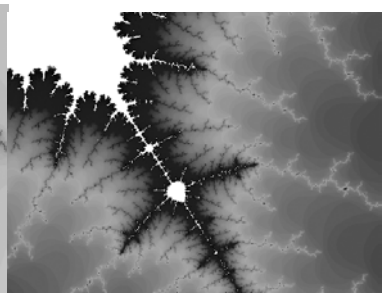
Existuje důkaz, že Mandelbrotova množina je nejčlenitějším útvarem, jaký lze v rovině vytvořit, čemuž nasvědčují i obrázky 4-6. „V hloubi fraktálu“ (na zvětšených obrázcích 5 a 6) pozorujeme také názorný příklad soběpodobnosti.



Obr. 4



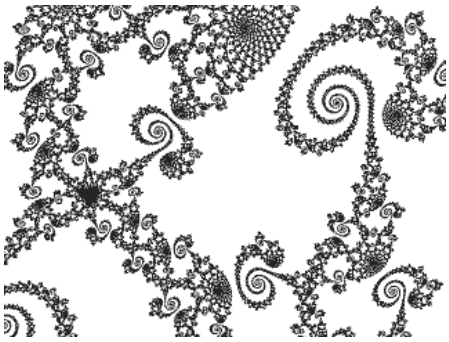
Obr. 5



Obr. 6

4 Shrnutí

Nejenže jsou fraktály fascinující a zajímavé objekty, ale nacházejí i řadu praktických využití. Kromě již zmiňovaných simulačních a prognostických účelů je lze využít např. pro generování textur nebo při testech rychlosti počítače (kdy mu zadáme za úkol vypočítat Mandelbrotovu množinu). Setkat se s nimi můžeme i v přírodě – zkuste si třeba podrobně prohlédnout list kapradiny …



Obr. 7 Detail části Mandelbrotovy množiny

Poděkování

Za možnost účasti na Fyzikálním týdnu 2003 děkujeme FJFI ČVUT v Praze.

Za úvod do problematiky a laskavou pomoc děkujeme dr. ing. Michalu Benešovi a ing. Jiřímu Mikyškovi.

Reference:

[1] http://mujweb.cz/www/fraktaly

[2] http://www.elektrorevue.cz/clanky/01040/

[3] http://www.elektrorevue.cz/clanky/01022/