Chaotická dynamika

M. Hudeček, SOŠ Strážnice, hudecek@centrum.cz
P. Bauch , Gymnázium Hustopeče, hydergine@seznam.cz
O. Červený, Gymnázium Plasy, comodor_falkon@seznam.cz
Č. Jirsák, Gymnázium F.X. Šaldy Liberec, cenda.jirsak@seznam.cz
V. Procházka, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, v.proch@email.cz

Abstrakt:

Naše skupina se zabývala studiem a rozpoznáváním chaotických systémů a podmínek, za kterých se z regulérního systému stane systém neregulérní (nepředvídatelný). Zvláštností chaosu je možnost aplikovat tyto poznatky na zdánlivě nesouvisející systémy – růst populace živočichů, průběh dopravní zácpy aj. Ke snadnějšímu hledání pravidelností v chaosu slouží diagramy ve fázovém prostoru, které jsme při zkoumání využívali.

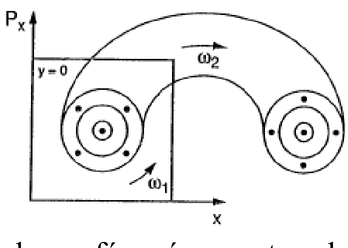
1 Úvod

Při zkoumání různých systémů z hlediska regulérnosti jsme určovali, zda je systém čistě regulérní (harmonický oscilátor), částečně chaotický (za jistých podmínek se chová regulérně, za jiných chaoticky – např. dvojité kyvadlo) či čistě chaotický (vývoj reálné populace). Naším cílem bylo také určit podmínky, při kterých se systém chová chaoticky nebo regulérně.

Využívali jsme programů pro simulaci takovýchto systémů – Double Pendulum, Billiard a Famulus, které umožňují vytvářet diagramy ve fázovém prostoru.

2 Pojmy

Pro zkoumání systémů z hlediska předvídatelnosti je nutné využít tzv. fázový prostor. Nezobrazuje obvyklou časovou závislost, ale závislost hybnosti (při konstantní hmotnosti jen rychlosti) na proměnné vyjadřující polohu (může to být výchylka, vzdálenost od počátku, poloha na kružnici …).



Počet rozměrů fázového prostoru není omezen. Je závislý na počtu proměnných, které se ve vztahu vyjadřujícím chování systému vyskytují. Více než trojrozměrné prostory se vymykají jak naší představivosti, tak i možnostem výpočetní techniky a nelze je tedy zobrazit standardním způsobem. Pro tyto případy se využívá tzv. Poincarého řezu.

Jedná se o dvourozměrný řez fázovým prostorem. Podobně jako ve fázovém prostoru lze pozorovat oblasti chaotické i regulérní.

3 Vývoj populace – program Famulus

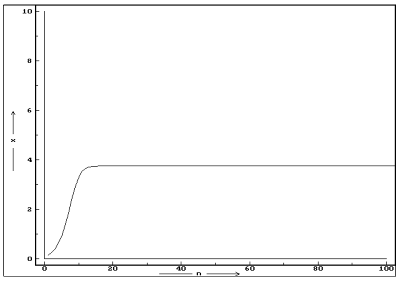
Příkladem modelu, který může být chaotický i regulérní, je vývoj populace živočichů. Na tomto abstraktním modelu můžeme demonstrovat, že i jednoduchá rovnice může definovat chaotické chování systému.

Využijeme známý příklad s populací králíků (Na druhu zvířete absolutně nezáleží. Stejně tak lze rovnici použít pro populaci tučňáků nebo šíření epidemií.).

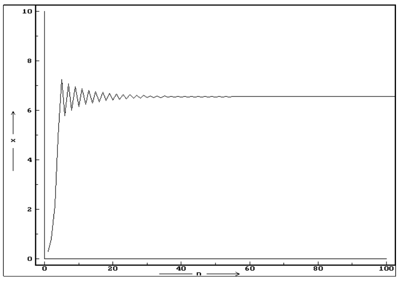
Vycházíme z předpokladu, že každý rok přibude určité procento populace. Populace roste, avšak časem musí dosáhnout maxima. To je způsobeno omezeným životním prostorem, množstvím potravy apod. Grafy znázorňují časovou závislost velikosti populace pro různé hodnoty koeficientu ***a***.

$$\mathbf{x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n / x_{max})}$$

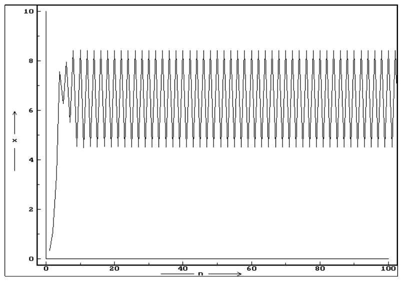
x_n … velikost populace v minulém roce
a … konstanta určující rychlost reprodukce
x_{max} … maximální velikost populace



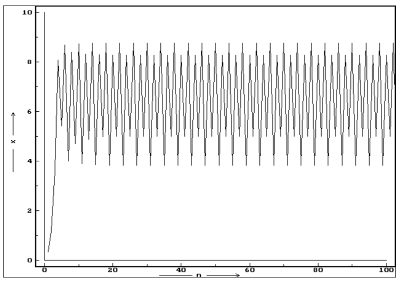
a = 1,6



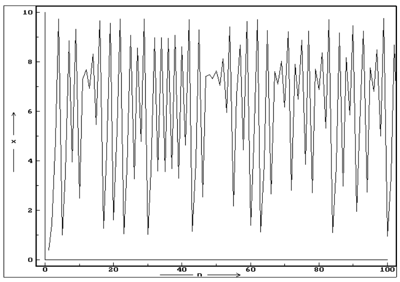
a = 2,8



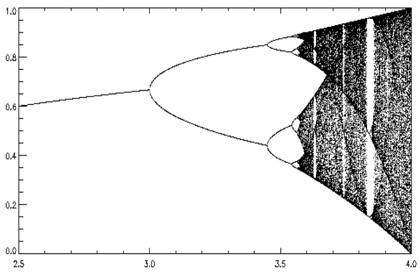
a = 3,4



a = 3,5



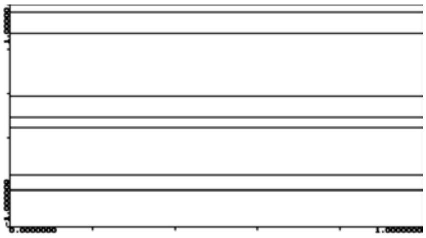
a = 3,9



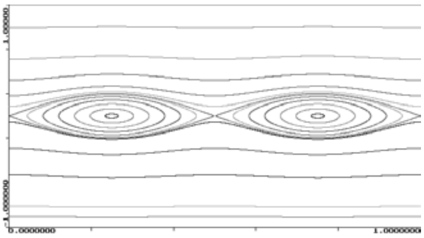
Z grafů vyplývá, že pro malé hodnoty koeficientu ***a*** populace dosáhne určité hodnoty a dál se nemění (a=1,6). Při zvyšování koeficientu populace kolísá, ale po čase se opět ustálí na jedné hodnotě (a=2,8). Pro ještě vyšší koeficienty populace kolísá mezi dvěma hodnotami (a=3,4), později čtyřmi (a=3,5) atd. až nastane chaos (a=3,9) - viz. obrázek vlevo. Tento jev nazýváme bifurkací. Lze říci, že zvyšováním koeficientu dosahujeme vyšší složitosti systému. Přesto během dalšího zvyšování narazíme na oblasti, kde se růst populace podobá růstu při nízkých hodnotách.

4 Billiard

Dalším příkladem vhodným k demonstraci chaosu je zidealizovaný „kulečník“. Koule se odráží od stěn stolu a do fázového prostoru vynášíme na vodorovnou osu místo odrazu (definované pomocí úhlu) a na svislou úhel odrazu. Pro různé tvary stolů dostáváme různé fázové diagramy. Křivky vyznačují regulérní oblasti a roztroušené body chaos.



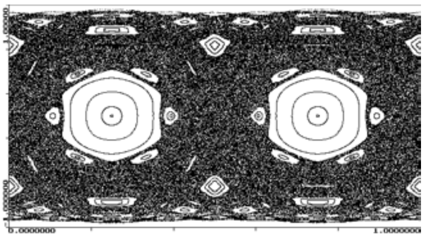
kruh



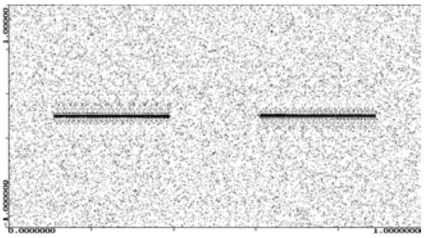
elipsa

U kruhového stolu je úhel stále stejný.

U elipsy se úhly mění, ale stále se jedná o regulérní pohyb.



oval

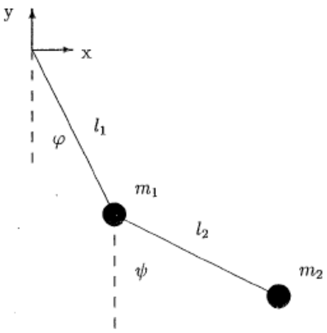


stadion

U oválu se již objevuje chaos s občasnými oblastmi regularity.

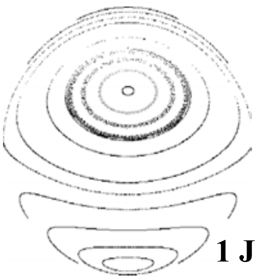
U stadionu je pohyb chaotický s dvěma vyjímkami, které reprezentují kuličku odrážející se od rovných okrajů stolu.

5 Dvojité kyvadlo

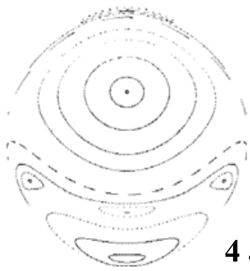


Jedním ze systémů vykazujících jak chaotické, tak regulérní chování je dvojité kyvadlo. Kvůli počtu proměnných musíme použít Poincarého řez. K tomu nám poslouží program Double Pendulum. Před simulací stanovíme hodnotu celkové energie. Tuto energii při každém dalším pokusu zvýšíme a pozorujeme výsledek.

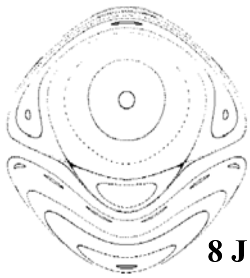
Jak je patrné z diagramů, při nízké energii (vzhledem k délce kyvadla a jeho hmotnosti) je chování kyvadla víceméně regulární (na diagramu křivky). Se vzrůstající energií systému dochází k nárůstu chaotických oblastí (na diagramu roztroušené body) až se systém jeví téměř jako čistě chaotický (E_t= 50 J). Při dalším zvyšování ale zjišťujeme, že se nepravidelně objevují (E_t= 120 J)a zase mizí oblasti regulérnosti.



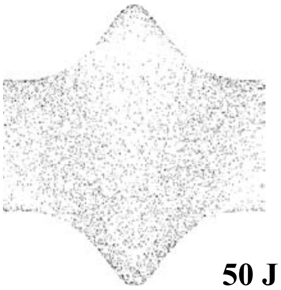
1 J

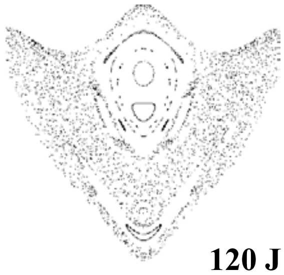


4 J



8 J


50 J


120 J

6 Shrnutí

Zjistili jsme, že chaotické systémy lze matematicky modelovat, ale díky tzv. motýlímu efektu (vysoké citlivosti chování systému na počáteční podmínkách) je nelze předpovídat. Nelze se tedy ani zpětně dopočítat k výchozím podmínkám, známe-li výsledek. Příčinou je všudypřítomná aproximace ve výpočtech i nepřesnosti v měření. Z fázových diagramů a Poincarého řezů lze však vypozorovat, přibližně při jakých podmínkách bude systém předvídatelný nebo chaotický.

Poděkování

Za konzultace našemu supervizorovi Ing. Petru Luftovi a Ing. Vojtěchu Svobodovi.

Reference:

1. GLEICK, J. : *Chaos: Vznik nové vědy,* Ando Publishing, 1996
2. KORSCH H.J. – JODL H.-J.: C*haos: A program collection for the PC,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994