Počítačové generování fraktálních množin

T. Jakoubek * (loony@seznam.cz)
O. Ševela **
J. Šotola °
P. Dlouhý °°
H. Korčák °°°

*Gymnázium a SPgŠ, Liberec
**Gymnázium Vídeňská, Brno
°Mendelovo gymnázium, Opava
°°Gymnázium Bernarda Bolzana
°°°Gymnázium T.G.M. Hustopeče

Cílem naší práce bylo zkoumat nekonečně složité geometrické útvary – fraktály a demonstrovat význam nelineární geometrie. Miniprojekt byl zaměřen na generování základních polynomických fraktálů, L-systémů a systémy afinních transformací (IFS) za pomocí PC.

1. Úvod

Fraktál je geometrický útvar, jehož jakákoli zvětšená část je zmenšená kopie celého fraktálu.Je to geometrický objekt, který po rozdělení na menší části vykazuje tvarovou podobnost s těmito částmi.

Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická.

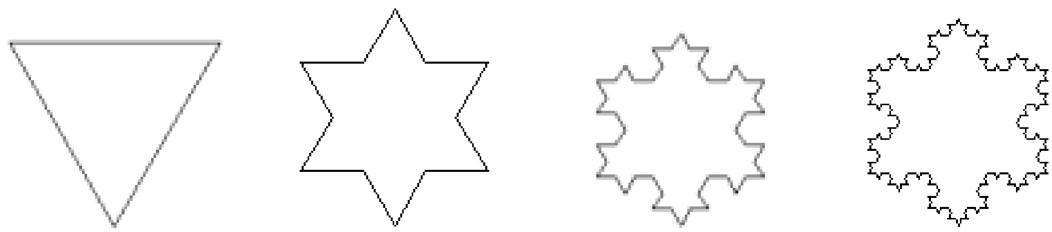
V běžném životě se nesetkáváme s útvary euklidovské geometrie (tzv. lineární útvary) ale s útvary nelineární geometrie (tvar mraku, list kapradiny, povrch plíce aj.). Za pomocí fraktálů můžeme popisovat velmi složité systémy (populační křivky, meteorologie).

2.1 Jednoduché fraktály

Základním kamenem fraktální geometrie je tzv. Cantorovo diskontinuum, které vzniká neustálým odebírání prostřední třetiny úsečky.

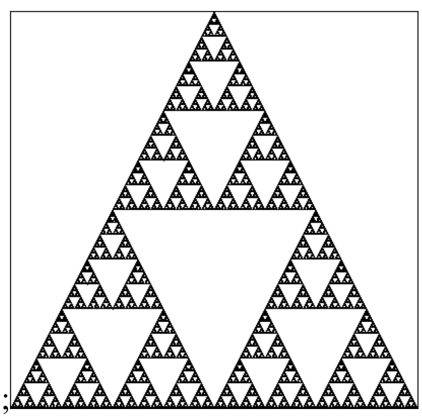
Obr.1 Cantorovo diskontinuum

Na tomto základě je postavena Kochova křivka. Vzniká úpravou rovnostranného trojúhelníku. Každou stranu rozdělíme na tři části. Nad prostřední třetinou každé strany vztyčíme další rovnostranný trojúhelník a úsečku nad kterou jsme ho vztyčovali, smažeme. Tento krok opakujeme nad každou takto nově vzniklou úsečkou. Po nekonečném počtu opakování vzniká útvar podobný sněhové vločce. Má nekonečně dlouhý obvod.



obr.2 Kochova křivka

Třetím nejzákladnějším fraktálem je Sierpińského koberec, který vzniká když rovnostranný trojúhelník o hraně 1 rozdělíme pomocí středních příček na 4 stejné trojúhelníky o hraně 1/3 a prostřední vyjmeme. Tento proces opakujeme nekonečněkrát, výsledek vypadá asi takto:

;

obr.3 Sierpniského trojúhelník

2.2 Mandelbrotova množina

Nejznámějším polynomickým fraktálem je Mandelbrotova množina. Definuje ji předpis:

$$M = \{c \mid P_c^n(0) \neq \infty \ \forall n \to \infty; c, z \in C\}$$

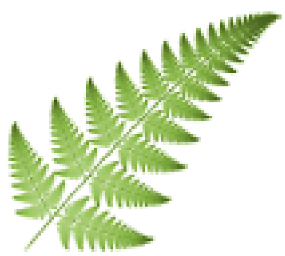
Je to podmnožina bodů roviny komplexních čísel nacházející se v okolí komplexní nuly. Bod *X* patří do této množiny právě tehdy, když posloupnost daná předpisem $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (kde z_0 bude například nulové a *c* je komplexní konstanta udávající souřadnice bodu *X*), nediverguje. Každým dalším krokem (iterací) se útvar stává složitějším.

obr.4 Mandelbrotova množina

Zvětšíme-li jakoukoli její část, vždy uvidíme útvar nápadně podobný původnímu obrazci. Mandelbrotova množina je pravděpodobně nejsložitější útvar, který lze v rovině vytvořit.

3. Shrnutí

Fraktály jsou velice zajímavé objekty, uplatňují se v umění, používají se pro generování textur nebo při testech rychlosti počítače. Pomocí nich se zkoumá difůze, populační křivky obyvatelstva nebo různé složité útvary, které se běžně vyskytují v přírodě – například list kapradiny:



obr.5 list kapraďorostu

Poděkování

Za zasvěcení do teorií generování fraktálních množin děkujeme Dr. Ing. Michalu Benešovi.Za možnost účasti na Fyzikálním týdnu 2004 děkujeme FJFI ČVUT v Praze.Děkujeme celému organizačnímu týmu FT.

Reference:

[1] Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.: ‚Chaos and Fractals of Science‘, Springer-Verlag, New York, 1992

[2] http://mujweb.cz/www/fraktaly

[3] http://www.elektrorevue.cz/clanky/01022/

[4] http://www.home.aonet.net.au/byzantium/ferns/fractals.html

[5] http://www.jjam.de/Java/Applets/Fraktale/Koch_Kurve.html

[6] http://giboda.aoedesign.de/Puncochar/mean.htm

[7] http://www.elektrorevue.cz/clanky/01040/

[8] Peitgen H.-O., Richter P.H.: The beauty of fractals, Springer-Verlag, Berlin, 1986