Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace ve fyzice

Supervisoři: Dr. Ing. Milan Šiňor, Magdaléna Kettnerová

M. Kozel	Gymnázium Benešov	-
M. Ježek	Gymnázium Jeseník	-
Z. Bělehrádek	SPŠE Brno	zdenek.belehradek@seznam.cz
T. Javůrek	Gymnázium Jeseník	jaworda.t@seznam.cz
J. Černý	Gymnázium Vrchlabí	cerny.honza@centrum.cz
L. Dvořák	Gymnázium Šumperk	-
M. Veselý	Gymnázium Český Brod	majkl.west@centrum.cz
S. Kozina	Gymnázium tř. Kpt. Jaroše Brno	ersin@post.cz

Abstrakt:

Cílem našeho miniprojektu bylo seznámit se s některými zástupci počítačových algebraický systémů, jejich možnostmi a využít je při řešení některých fyzikálních úloh. Podrobněji jsme se zabývali programem *Mathematica 5*, který jsme pak použili na výpočty z oblasti difrakce na štěrbině a na mřížce.

1 Úvod

Cíl projektu byl jasný – zjistit, co všechno je nyní v možnostech moderních počítačových algebraických systémů. Pro pochopení tohoto problému si ale nejprve musíme ujasnit základní pojmy, které se nachází již v názvu projektu – co je to vlastně počítač? A co je to ta algebra?

2 Základní pojmy

Počítač je samočinný stroj, schopný v dnešní době velmi rychle vykonávat triviální operace – sčítat, odčítat, a pokud mu řekneme jak, je schopen pomocí těchto operací vykonávat i některé klasické funkce. Pokud tedy známe přesný algoritmus výpočtu, není již velký problém pomocí počítače tento výpočet vykonat. Konkrétní příklad – jak dlouho by člověk počítal například faktoriál sta? Řekl bych, že to bude doba v řádu dnů... A jak dlouho by to počítal průměrný dnešní počítač? Maximálně v řádu vteřin...

Nyní rozdíl mezi algebraickými a numerickými výpočty. Numerický výpočet se pokouší problém vyřešit přímo s hodnotami – a díky tomu je nucen například periodické hodnoty zaokrouhlit. Zvolíme si požadovanou přesnost a výsledek spočítáme. Oproti tomu jsou algebraické výpočty přesné. Problém se pokusíme formulovat nějakými obecnými vztahy a teprve na konci výpočtu se pokusíme dostat k nějakým konkrétním hodnotám. A ani to není nutné – i obecný výsledek se dá považovat za úspěch. Algebra je stále jakousi výsadou inteligence – vymyslet postup, jak se dobrat k výsledku s obecnými hdnotami není jednoduché. Počítač sice může vše spočítat, postup ale stále musí vymyslet člověk. Základní rysy algebraických výpočtů jsou zřejmé:

- přesnost
- bez zaokrouhlování
- používání různých symbolů a proměnných
- možnost řešit numericky náročné problémy obecně

Nejlépe vyplynou rozdíly z této tabulky:

Numericky	Symbolicky
$2/6 \to 0.333333$	$2/6 \to 1/3$
$2+3 \to 5$	$x + 2x \to 3x$
$\cos(3.14159) \to -0.999999$	$\cos(\pi) \to -1$
	$\sin(2x) \to 2 \sin x \cos x$
	$\frac{d\,x^2}{d\,x} \to 2x$
$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^2-1} d\,x \to 0.1438$	$\int \frac{x}{x^2-1} \to \frac{\ln\lvert x^2-1\rvert}{2}$
	$a^2 - b^2 \to (a+b)(a-b)$
Numerické zhodnocení	Algebraické zjednodušení

Obecně vše můžeme shrnout definicí "Algebraické výpočty neboli operace se symboly neboli počítačová algebra jsou oblastí vědeckých výpočtů, které zkoumají, analyzují, realizují a využívají algebraické algoritmy."

3 Konkrétní algebraické systémy

Jednotlivé algebraické systémy jsou si v zásadě velmi podobné. Mezi jejich hlavní funkce patří různé algebraické výpočty a vizualizace funkcí ve 2D i 3D grafech. Velkou výhodou je, že algebraické systémy pracují se symboly a ne s čísly, což zaručuje přesnost výpočtů.

Asi nejznámějším algebraickým systémem je Maple (www.maplesoft.com) . Jeho výhodou je široká uživatelská podpora, vysoká rozšířenost (přes 5 mil. uživatelů) a tím i dostupnost např. zdrojových kódů některých programů nebo návodů a příruček. Velkou nevýhodou je zvláště pro případné domácí uživatele cena, která dosahuje asi 2000 $.

Dalším velmi rozšířeným algebraickým systémem je Mathematica (www.wolfram.com), který jsme používali my. Oproti Maplu je trochu více „user friendly", ale obsahuje o něco méně doplňkových funkcí. Podobně jako u Maplu může řadu potencionálních uživatelů odradit vysoká cena.

Z komerčních algebraických systémů můžeme zmínit ještě program MathCAD (www.mathcad.com), který umí v podstatě totéž, co Maple a Mathematica.

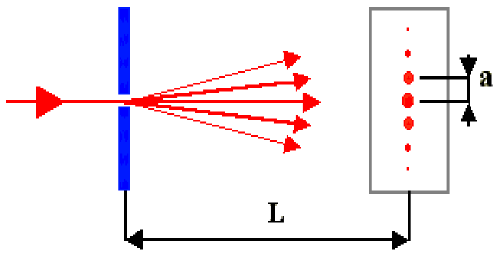
Nepříliš movité uživatele jistě potěší existence freeware algebraických systémů jako třeba MuPAD (www.mupad.de) nebo Maxima (maxima.sourceforge.net), které se funkčností takřka vyrovnají komerčním programům.

4 Difrakce světla na štěrbinách a na difrakční mřížce

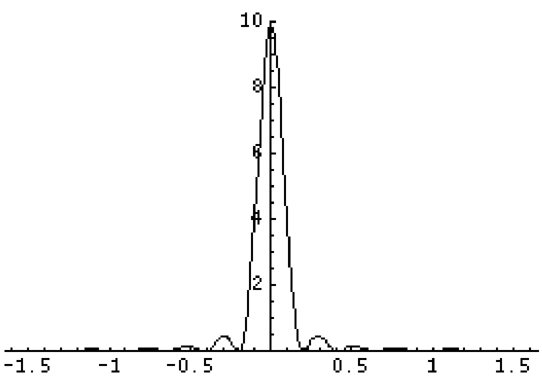
Programu Mathematica jsme užili k simulaci průchodu světla skrz štěrbinu a optickou mřížku. Zjišťovali jsme velikost intenzity světla při dopadu na stínítko po průchodu difrakční mřížkou. Zde jsou hlavně ukázky výstupů z programu, rovnic a grafů, které je možno vytvořit.

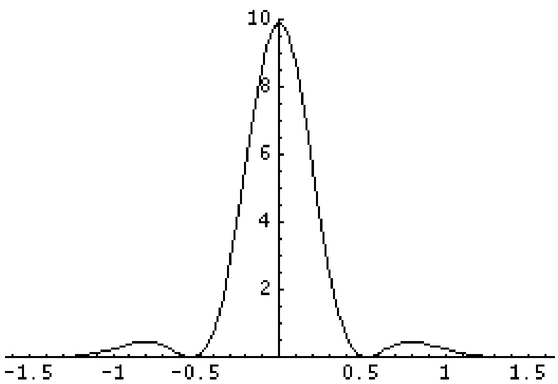
Difrakce na jedné štěrbině

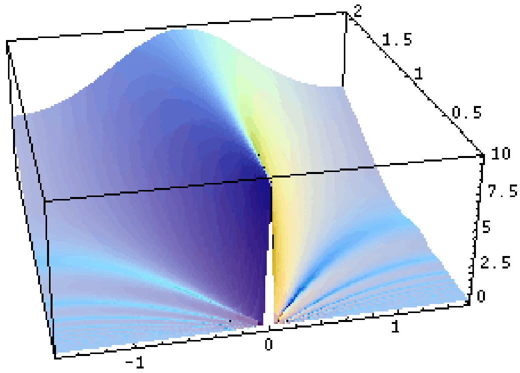
Obrázek znázorňuje difrakci světla na jedné štěrbině. Světlo procházející velmi úzkou štěrbinou, jejíž šířka je srovnatelná s vlnovou délkou světla se po průchodu štěrbinou začíná šířit všemi směry (vyplývá z vlnové podstaty světla). Na stínítku se vytváří tzv. difrakční obrazec, jehož podobu lze matematicky modelovat.



A tady je 2D i 3D graf z programu mathematica. Dvourozměrné grafy se liší velikostí štěrbiny, kterou světlo procházelo. 3D graf znázorňuje závislost na velikosti štěrbiny a úhlu dopadu světla, vpředu je štěrbina největší, směrem dozadu se zmenšuje.

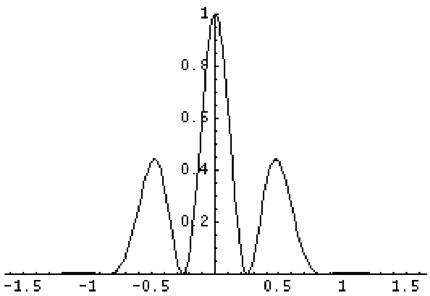


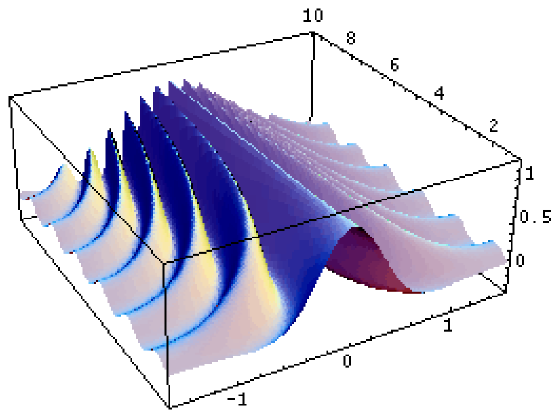




Difrakce na dvou štěrbinách

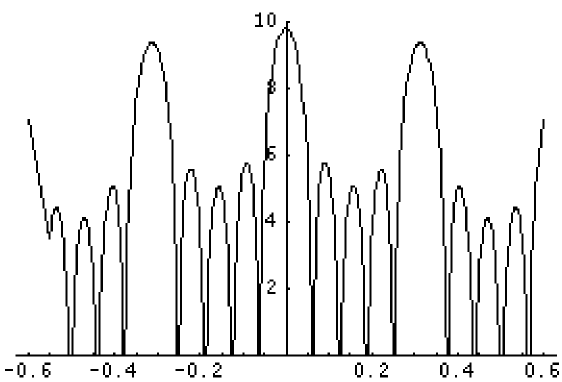
Na dvou štěrbinách dochází k podobnému jevu, ale světlo z jednotlivých štěrbin spolu vzájemně interferuje, tudíž je vniklý obrazec mnohem složitější. Trojrozměrný graf znázorňuje závislost intenzity světla na šířce štěrbiny a úhlu dopadu světla na stínítko. Vzadu jsou štěrbiny nejširší.

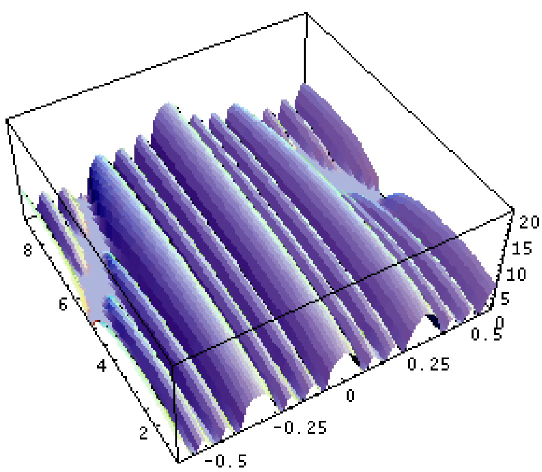




Difrakce na horizontální mřížce

Na horizontální mřížce je několik štěrbin vedle sebe, takže interferenční obrazec je v závěru ještě složitější, 3D graf pak reprezentuje závislost intenzity na šířce štěrbiny a poloze obrazce na stínítku. Měřítko osy y (na 2D) a osy z (na 3D) je zlogaritmováno logaritmem o základu 2.

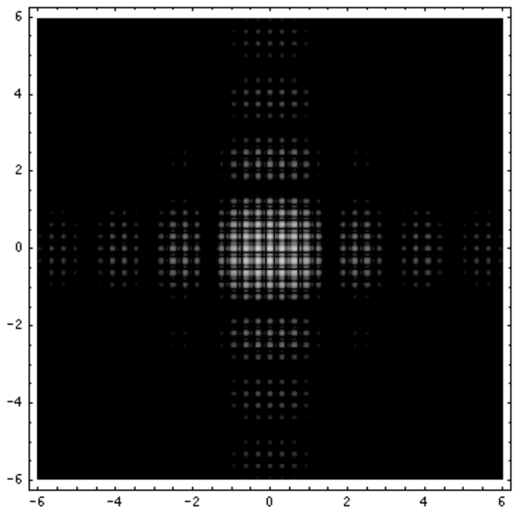




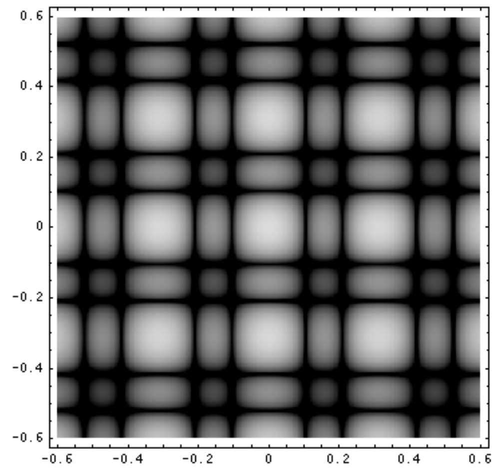
Difrakce na dvourozměrné mřížce

Dvourozměrná mřížka je tvořena čtvercovou sítí štěrbin, grafy jsou závislost intenzity na úhlu šíření světla z mřížky. Graf 1 je vlastní interferenční obrazec, graf 2 je detail středové části, graf 3 je trojrozměrné znázornění intenzity světla ve středové části.

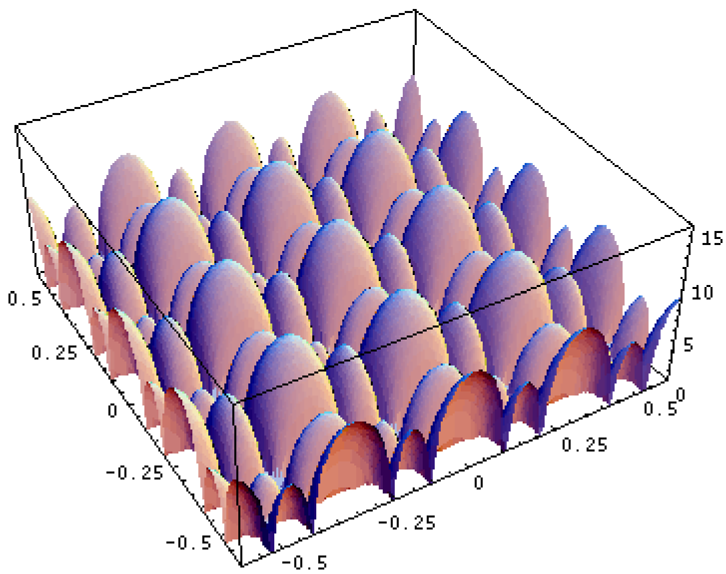
Graf 1



Graf 2



Graf 3



5 Shrnutí

Výpočetní systém Mathematica je mocným nástrojem využitelným při matematické simulaci fyzikálních jevů. Ovládání programu je poměrně složité, ale jeho základy lze zvládnout pomocí desetiminutové výukové lekce.

6 Poděkování

Děkujeme našim supervizorům za jejich velikou trpělivost a obětavost s níž nám byli k dispozici při řešení našeho úkolu.

7 Reference

[1] D.Halliday, R.Resnick, J.Walker – Fyzika, část 4.
[2] Eric Weisstein's world of science – http://scienceworld.wolfram.com
[3] Katedra fyzikální elektroniky FJFI – http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/ca/all.html