Balmerova série vodíku

Eva Bartáková, SGAGY Kladno, evebartak@centrum.cz
Adam Fadrhonc, SSOU a U, Černá za Bory, Pardubice, adam@kve.cz
Lukáš Malina, gymn. Christiana Dopplera, Praha, lukas-malina@seznam.cz
Lenka Pöslová, gymn. Mozartova, Pardubice, lenka.posl@seznam.cz

Abstrakt:

Balmerova série vodíku je spektrum energetických přechodů v atomu vodíku z vyšších hladin na 2. hladinu , tj.druhá nejbližší energetická hladina od jádra atomu (n=2). Její první čtyři čáry, které leží v oblasti viditelného světla a označené $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$, byly pozorovány již v roce 1885 J.Balmerem. Toto pozorování také významně přispělo k ověření Bohrova modelu atomu, který představuje jakýsi předstupeň kvantové mechaniky. Na závěr příspěvku je pro matematicky zdatné čtenáře odvozena podmínka nejmenší deviace paprsku světla procházejícího hranolem a zahrnutí do Bohrovy kvantovací podmínky do vztahu pro celkovou energii atomu vodíku.

1 Úvod

BOHRŮV MODEL ATOMU

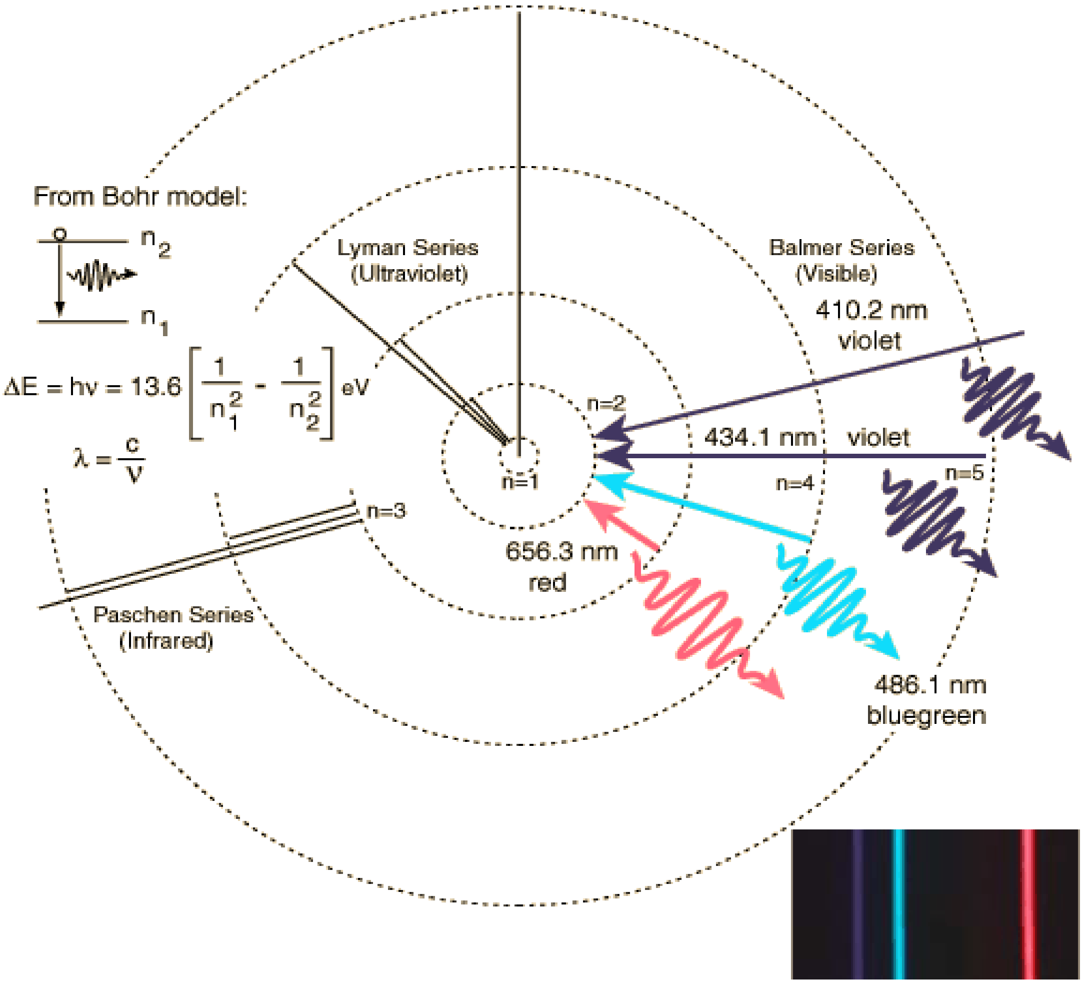
Niels Bohr (1885-1962), dánský fyzik, roku 1913 navrhl model atomu na základě spektroskopických měření, která prokázala, že spektrum záření je diskrétní a nikoli spojité, jak se podle planetárního modelu předpokládalo. Navíc proti teorii planetárního modelu byla Planckova hypotéza týkající se energetického spektra harmonického oscilátoru.

Bohrovy postuláty:
1. Atomy mohou setrvávat delší dobu v určitých-stacionárních stavech, ve kterých nevyzařují ani nepohlcují energii. Energie těchto stavů tvoří diskretní posloupnost.
2. Při přechodu z jednoho stacionárního pole do druhého vydávají nebo pohlcují záření jen určité frekvence.

Stacinárním stavem rozumíme takový, kdy elektron krouží kolem jádra po dráze, která obsahuje celočíselný počet vlnových délek.

Johann Balmer (1825-1898), švýcarský matematik, fyzik a profesor dívčího gymnázia v Basileji roku 1885 objevil zákonitost pro frekvenci spektrálních čar atomu vodíku.

Na počátku 20.století byly objeveny další čáry spektra vodíku, Lymanova, Paschenova, Brackettova a Pfundova. Nejsou však v oblasti viditelného světla.



- **SPEKTRÁLNÍ SÉRIE**

K potvrzení Bohrova modelu atomu přispělo pozorování spektra přechodů elektronu atomu vodíku z vyšších energetických hladin (nejvyšší 0 eV) do nižších(-13 eV). Balmer pozoroval čtyři čáry v oblasti viditelného světla, označil je jako H_α,, H_β, H_γ a H_δ. Pro H_α, získal hodnotu vlnové délky 656,3nm, vlnová délka se postupně zmenšuje do tzv.hrany série, kdy je vlnová délka dopadajícího světla nejmenší – 364,6nm.

2 Balmerova série a měření Rydbergovy konstanty

ZJIŠTĚNÍ DISPERZNÍCH ÚHLŮ Hg, INDEXU LOMU KRYSTALU

ε – je disperzní úhel, což je úhel odklonu jednotlivých spektrálních paprsků

φ – vnitřní úhel hranolu, α_1 – úhel dopadu, β_1 , β_2 – vnitřní úhel lomu, α_2 – vnější úhel lomu

Využíváme Snellova zákona lomu:

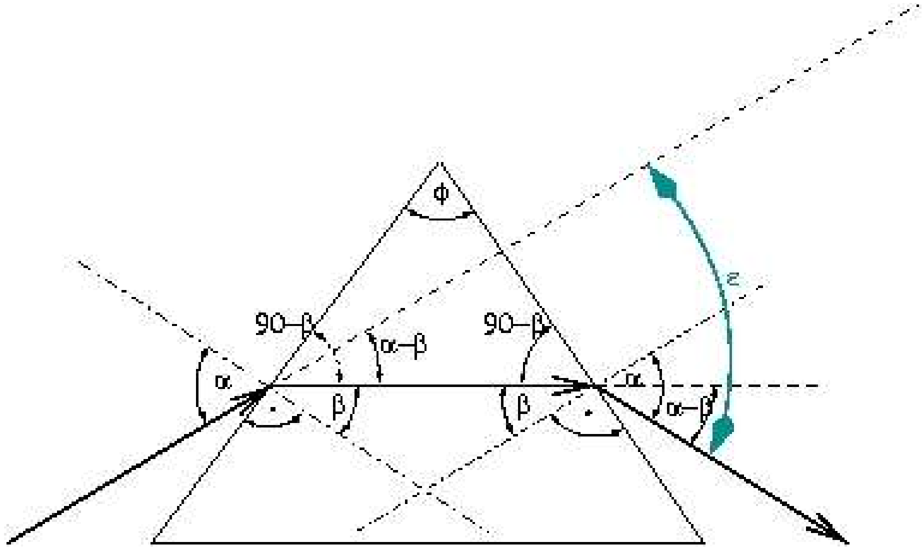
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \qquad \textbf{(1)}$$

Disperzní úhel je nejmenší tehdy, když se $\alpha_1 = \alpha_2$; => $\boldsymbol{\varepsilon = 2\alpha - 2\beta}$

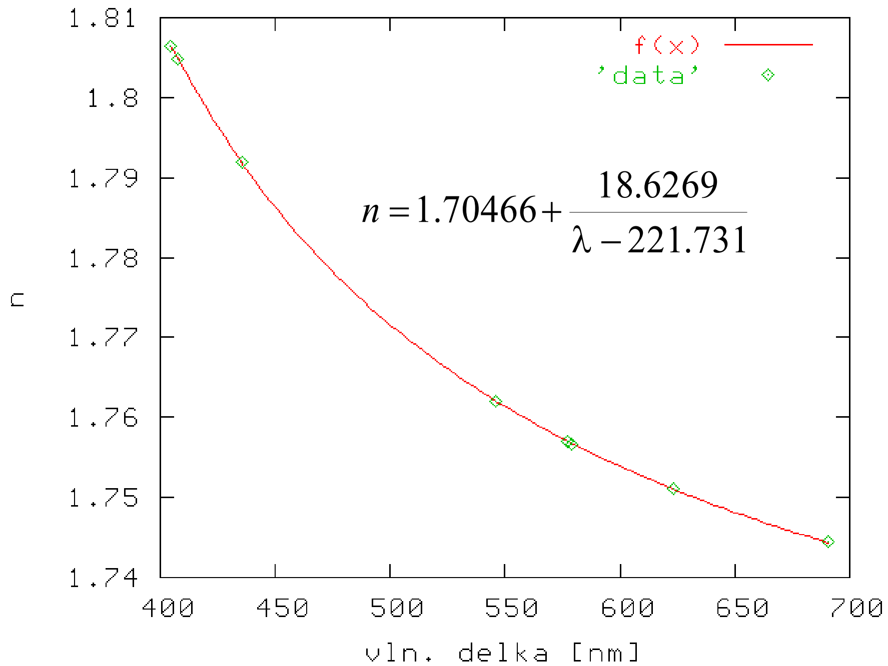
Z obrázku níže je vidět, že $\phi = 180 - 2(90 - \beta) = 2\ \beta$

Neboť n_1 pro vzduch rovno 1 vyplývá: $n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\varepsilon + \phi}{2}\right)}{\sin \beta}$ =>

$$n = 2\sin\left(\frac{\varepsilon + \phi}{2}\right) \qquad \textbf{(2)}$$



Vzorcem (2) jsme vypočítali indexy lomu jednotlivých spektrálních čar o určité vlnové délce. Index lomu je obecně funkcí vlnové délky *n=n(λ)* a to dosti složitou, takže jsme použili rtuťovou výbojku, u které známe vlnové délky jednotlivých čar, jako kalibrační. Do kalibračního grafu jsme dále zahrnuli tabulkové hodnoty závislosti indexu lomu flintového těžkého skla, ze kterého je hranol vyroben, a výsledek je uveden v Grafu závislosti vlnové délky na indexu lomu. Tuto křivku jsme profitovali hyperbolickou funkcí a výsledek je uveden v grafu 1



Graf 1

Hyperbolická funkce má tva

Vztah uvedený v grafu ase nazývá kalibrační rovnice, neboť nyní, když změříme úhel nejm. deviace pro jakoukoli jinou spektrální čáru, tak dosazením vypočteného indexu lomu do upravené rovnice $$\lambda=\frac{-18.6269}{(1.70466-n)}+221{,}731 \quad , \tag{3}$$

dostaneme příslušnou vlnovou délku. Takto budeme posupovat při výpočtu vlnových délek čar Balmerovy série.

A. BALMEROVA SÉRIE A VÝPOČET RYDBERGOVY KONSTANTY

Měřili jsme disperzní úhly spektrálních čar atomárního vodíku, ze kterých jsme vypočítali indexy lomu podle (2). A z rovnice, která vyšla v grafu, jsme dopočítali vlnovou délku jednotlivých čar podle (3). Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

čára	[nm] naměřená	[nm] tabulková
1.	433,083	434,047
2.	486,769	486,133
3.	657,591	656,279

Tabulka 1

Čtvrtá čára spektra se již nalézá příliš blízko ultrafialovému záření a není v goniometru viditelná. Nyní určíme Rydbergovu konstantu

Z experimentálního odvození platí, že:

$$\lambda=\frac{\mathrm{n}^2}{n^2-4}\cdot B \qquad n\in Z^+ \tag{4}$$

(4) vynásobíme Planckovou konstantou a upravíme:

$$hf=\frac{c\cdot(n^2-4)}{Bn^2}h \tag{5}$$

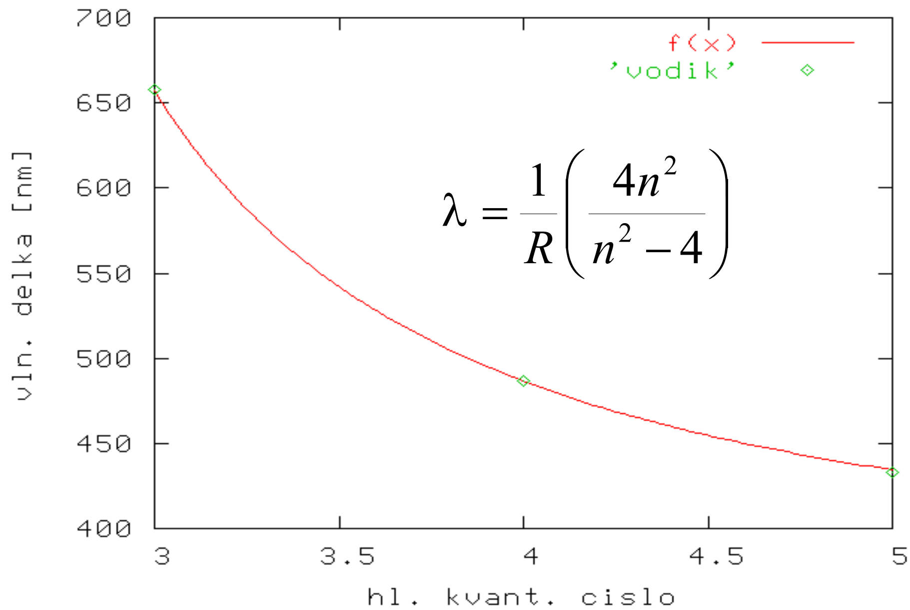
(5) použijeme pro výpočet Rydbergovy konstanty následujícím způsobem:

Pro excitaci platí: $E_m-E_n=\frac{hc}{B}\cdot\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)=\frac{4hc}{B}\cdot\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$ za 4/B zavádíme Rydbergovu konstantu (R). Využitím (5) dostáváme :

$$R=\frac{1}{\lambda\cdot\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)} \tag{6}$$

Pro Balmerovu sérii vodíku platí m=2; n=3 (červená), n=4 (tyrkysová), n=5 (fialová). Hodnoty uvedené v tabulce jsme vynesli do grafu2 a opět profitovali v programu Gnuplot funkcí uvedenou v grafu 2. Tím jsme získali Rydbergovu konstantu

$R=1.09613\cdot10^7 \pm 0{,}001297\cdot10^7\ \mathrm{m}^{-1}$



Graf 2

3 Shrnutí

Naměřená hodnota Rydbergovy konstanty se svým intervalem trefuje do tabulkové hodnoty 1,09677·10^7 m^{-1}. Vzhledem k velmi malé chybě 0,12% se jedná o velmi kvalitní výsledek. Prakticky jsme ověřili spektrální čáry vodíku (vlnová délka 657,591 nm; 486, nm; 425,0141 nm), čtvrtá je příliš slabá.

Poděkování

Děkujeme hlavně našemu supervisorovi Davidu Tlustému, organizátorům fyzikálního týdne a Nadačnímu fondu teoretické fyziky.

Reference:

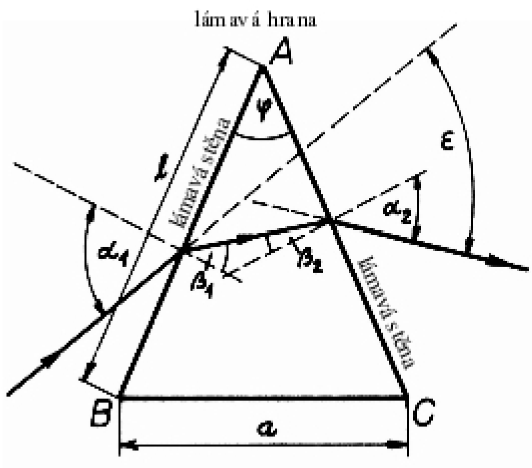
[1] KOLEKTIV KATEDRY FYZIKY: *PRAKTIKA Z FYZIKY* , 2005 (webové stránky fyzikálních praktik FJFI-ČVUT: http://praktika.fjfi.cvut.cz – úloha Balmerova série)

[2] E.V.ŠPOLSKIJ *ATOMOVÁ FYSIKA* ; Technicko-vědecké vydavatelství Praha ; 1952

Dodatek (viz. Následující stránky)

Odvození Rydbergovy konstanty z planetárního modelu zahrnutím Bohrových kvantovacích podmínek a odvození podmínky nejmenší deviace.

Upozornění: Pouze pro otrlé!



Obrázek 1: Lom světla hranolem

Podmínka nejmenší deviace

Ze obrázku (1) je možno pomocí geometrie odečíst:

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2$$
$$\varepsilon = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2.$$

Takže

$$\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2 + \varphi. \tag{1}$$

Derivováním (1) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\alpha_1} = 1 + \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_1}. \tag{2}$$

Zde si uvědomíme, že $\alpha_2 = \alpha_2\Big(\beta_2\big(\beta_1(\alpha_1)\big)\Big)$. Potom $\dfrac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_1}$ musí vypadat takto

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_1} = \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\beta_2}\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1}\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}\alpha_1}. \tag{3}$$

Výraz (3) budeme vyjadřovat po částech:

1. **Výpočet $\dfrac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\beta_2}$:** Vyjdeme ze Snellova zákona lomu $\dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} = \dfrac{1}{n}$, kde n je index lomu materiálu, ze kterého je hranol vyroben. Platí tedy

$$\sin\alpha_2 = n\sin\beta_2 \qquad \Big/\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_2}$$

$$\cos\alpha_2\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\beta_2} = n\cos\beta_2 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\beta_2} = n\frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2}$$

2. **Výpočet $\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1}$:** Platí

$$
\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 &= \varphi \qquad /\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_1} \\
\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1} &= -1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

3. **Výpočet $\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}\alpha_1}$:** Opět vyjdeme ze Snellova zákona, tentokráte platí

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha_1 &= n\sin\beta_1 \qquad /\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_1} \\
\cos\alpha_1 &= n\cos\beta_1\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}\alpha_1} \\
\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}\alpha_1} &= \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}\cos\alpha_1}{\mathrm{d}\cos\beta_1}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Do vztahu (3) dosadíme z (4), (5) a (6) a dostaneme

$$
\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_1} = n\frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2}\cdot(-1)\frac{1}{n}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} = -\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1}. \tag{7}
$$

Dosezením do (2) dostaneme

$$
\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\alpha_1} = 1 - \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} \tag{8}
$$

a

$$
\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\alpha_1} = 0 \Rightarrow \cos\alpha_1\cos\beta_2 = \cos\alpha_2\cos\beta_1. \tag{9}
$$

Rovnice (9) je vlastně podmínka nejmenší deviace. Pomocí snellova zákona a vztahy mezi goniometrickými funkcemi si tuto podmínku vyjádříme

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha_1\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\alpha_2} &= \cos\alpha_2\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\alpha_1} \qquad /^2 \\
\cos^2\alpha_1\left(n^2-\sin^2\alpha_2\right) &= \cos^2\alpha_2\left(n^2-\sin^2\alpha_1\right) \\
\left(1-\sin^2\alpha_1\right)\left(n^2-\sin^2\alpha_2\right) &= \left(1-\sin^2\alpha_2\right)\left(n^2-\sin^2\alpha_1\right) \\
n^2 - n^2\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 &= n^2 - n^2\sin^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 \\
\left(n^2-1\right)\left(\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_2\right) &= 0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2,\ \text{neboť } n\neq 1 \text{ a } \alpha_1,\alpha_1\in\langle 0,\pi/2\rangle
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Pokud tedy platí podmínka nejmenší deviace, potom je možné z geometrie hranolu odečíst

$$
\varepsilon_0 = 2\alpha - \varphi, \quad 2\beta = \varphi. \tag{11}
$$

Dosazením (11) do snellova zákona dostaneme

$$
n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\left(\dfrac{\varphi+\varepsilon_0}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}. \tag{12}
$$

Odvození Rydberghovy konstanty

Rydbergova konstanta se dá spočítat tak, že na planetární model atomu Bohrovu kvantovací podmínku $2\pi m_e v r = nh$.

Nechť záponě nabitý elektron obíhá kolem kladně nabitého jádra. Aby orbita byla stabilní, musí se coulombická síla rovnat dostředivé

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e r \omega^2 = \frac{m_e v^2}{r}, \tag{13}$$

kde ϵ_0 je permitivita vakua, e náboj elektronu, r poloměr kruhové dráhy elektronu, m_e hmotnost elektronu, ω úhlová a v obvodová rychlost elektronu. Zahrnutím Bohrovy kvantovací podmínky do (13) můžeme vyjádřit

$$v = \frac{e^2}{2nh\epsilon_0} \text{ a } r = \frac{nh}{2\pi m_e v} = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e^2 e^2} \tag{14}$$

Pro celkovou energii tohoto systému platí

$$E = T + U$$

kde kinetická energie $T = m_e v^2/2 = m_e r^2 \omega^2/2$ a potenciální je zde rovna práci, kterou coulombická síla působící na elektron vykoná, když se přesune z nekonečna do vzdálenosti r od jádra. Takže

$$U = \int_{\infty}^{r} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \varrho^2} \mathrm{d}\varrho = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Celková energie je tedy

$$E = \frac{1}{2} m_e r^2 \omega^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{15}$$

Teď tuto energii nakvantujme, jak vychází z Balmerovy série atomu vodíku,

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2}$$

a položíme rovnu (15).

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Rhc}{n^2} \tag{16}$$

Do této rovnice dosadíme za r a v z (14) a dostaneme

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{m_e e^4}{4\epsilon^2 n^2 h^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e^2 e^2}} = -\frac{Rhc}{n^2} \\ \frac{m_e e^4}{8h^2}\epsilon_0^2 = Rhc \end{gathered} \tag{17}$$

a dostaneme finální vztah

$$R = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}. \tag{18}$$