Počítačové zobrazování fraktálních množin

E.Viktorinová, G-F.M. Pelcla, **Viktorinova.Eva@seznam.cz**
O.Červený, -, **Comodor_Falkon@seznam.cz**
P.Kratochvíl, G-Světlá nad Sázavou, **petr-kratochvil@seznam.cz**
S.Pikula, G-Matyáše Lercha, **Antirux@seznam.cz**

Abstrakt:

Hlavním cílem je zkoumání a modifikace některých fraktálů za účelem vylepšení jejich vzhledu či získání nových fraktálních objektů. Sledujíc tento cíl, pokusili jsme se o generování rozmanitých fraktálů vycházejících většinou z Mandelbrotovy množiny, k čemuž jsme využívali několika speciálních programů (Hlavně programu „fractal" naprogramovaného P.Kratochvílem). S pomocí těchto fraktálů jsme se pak pokusili poukázat na krásu, jakou je schopna matematika vygenerovat a tím přispět k popularizaci fraktální geometrie jakožto relativně nového vědního oboru.

1 Úvod

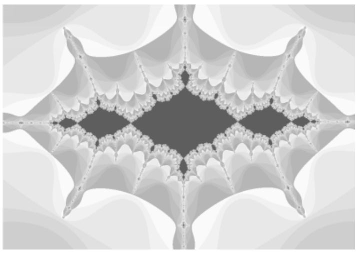
Naší motivací byla možnost vytvoření vlastních fraktálů, obrazů krásných ve své složitosti a přitom jednoduchých ve své podstatě a tím se přiblížit přírodě, která tuto mnohdy velice jednoduchou matematiku často používá…

2 Fraktály, jejich konstrukce i význam

- Při svých pokusech jsme vycházeli z Juliových množin, Mandelbrotovy množiny (množina všech parametrů „c"Juliových množin), Newtonova fraktálu, Henochova fraktálu, Sherpinského fraktálů i von Kochovy vločky. Při této činnosti jsme využívali programy „fractal" od našeho kolegy P.Kratochvíla, „XaoS –3.1" a „winfract"
- Výsledkem naší činnosti bylo větší než velké množství působivých obrázků – grafických znázornění výsledků námi zadaných vzorců a jejich počátečních hodnot. Zde jsou tedy některé z nich, včetně popisu jejich konstrukce – začnu Juliovými množinami:
  - Juliova množina je část roviny, která je oborem oscilace následující transformace:

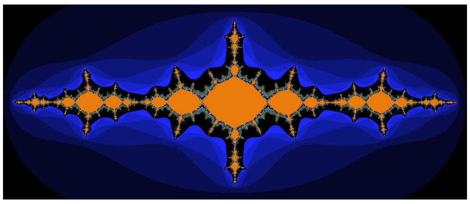
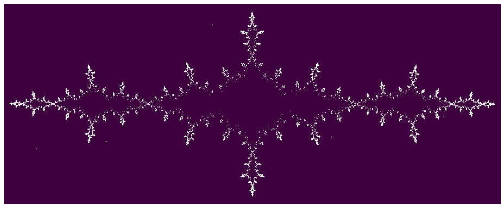
$$z' = z^2 + c$$

(z, $c \in$ C). z je iterační proměnná, c je parametr. Tvar Juliovy množiny je na něm velice závislý a je citlivý i na jeho malé změny. Pro některá c je Juliova množina fraktálním útvarem. Juliových množin je nekonečně mnoho.

Některé fraktální Juliovy množiny. Obor konvergence je vyznačen nejtmavší barvou. Juliovou množinou je obor oscilace, tedy jeho hranice s oborem divergence.

Juliovu množinu lze sestrojit také jako IFS fraktál určený dvěma nelineárními transformacemi v komplexním oboru $z' = \sqrt{z - c}$. Tento iterační předpis určuje dvě transformace, protože existují dvě druhé odmocniny z komplexního čísla. Všimněme si, že tento předpis je inverzní k výše uvedenému předpisu, určující obor konvergence a divergence. Poloupnost jednotlivých bodů bude opačná, budeme se pohybovat po zpětné orbitě. Body v rovině podrobované původní transformaci se rychle vzdalovaly od oboru oscilace (konvergovaly nebo divergovaly). Nyní se budou k oboru oscilace, jakožto ke svému atraktoru, rychle přibližovat.

Juliova množina a její IFS fraktál

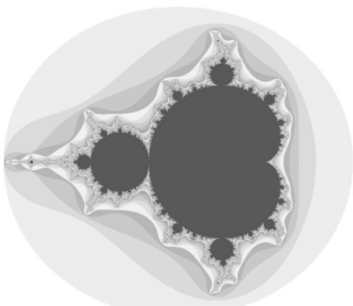
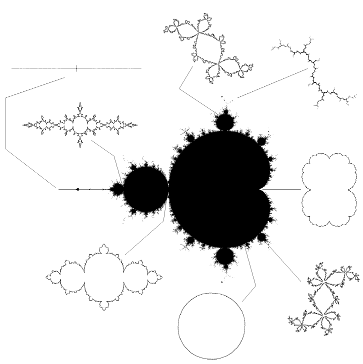
Ještě zbývá říci, pro která c je Juliova množina fraktálem. Jsou to body z oboru oscilace Mandelbrotovy množiny.

- Mandelbrotova množina vzniká stejným iteračním vzorcem, jako Juliovy množiny, s jedním rozdílem. Za parametr c považujeme vždy bod na začátku orbity. Chceme-li např. zjistit, jestli komplexní číslo y patří do oboru konvergence nebo divergence, budeme sledovat chování orbity dané iteračním vzorcem

$$z' = z^2 + y,$$

kde na začátku výpočtu dosadíme $z = y$.

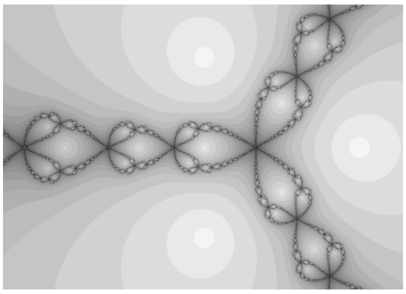
Objevením Mandelbrotovy množiny dosáhl Mandelbrot sjednocení Juliových množin. Každým bodem Mandelbrotovy množiny je určena jedna Juliova množina – stačí tento bod použít jako její parametr c.

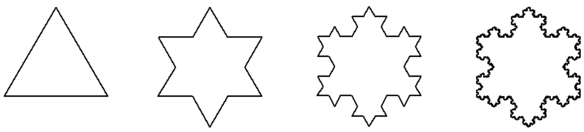
Mandelbrotova množina je *statisticky soběpodobná*, což znamená, že soběpodobný není fraktál samotný, ale jeho statistické charakteristiky. Jednoduše řečeno, v Mandelbrotově množině můžeme nalézt její mírně modifikované kopie.

- Newtonovy Fraktály Při výpočtech podle Newtonovy metody se chovají chaoticky dvě skutečnosti. První z nich je samotný „pohyb“ bodu x_n po vodorovné ose, druhou pak je funkce přiřazující bodu na vodorovné ose ten z nulových bodů funkce *f*, ke kterému se aproximační proces přiblíží jako k prvnímu na vzdálenost shora omezenou nějakou konstantou.

  Zajímavé fraktály získáme, budeme-li visualizovat aproximační proces v případě komplexní funkce komplexní proměnné. Zde již nebudeme vycházet z geometrické konstrukce tečny ke grafu funkce, ale pouze z výše odvozeného vztahu mezi sousedními členy v aproximační řadě. Vyjádříme-li z něj $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, získáme vzorec pro postupné počítání dalších iterací na základě předchozích. Zajímavé obrazce lze získat obarvením bodů roviny například podle toho, ke kterému z nulových bodů konverguje posloupnost v tomto bodě začínající, nebo podle počtu iterací nutných k přiblížení k některému nulovému bodu na vzdálenost menší než nějaká rozumná konstanta.

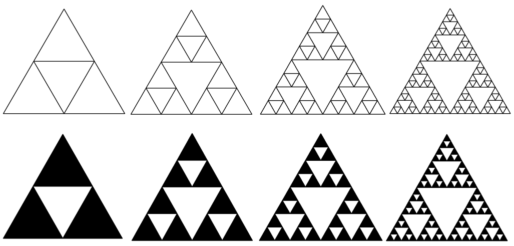
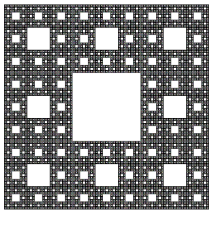
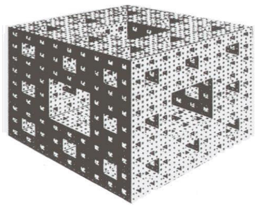


- Von Kochova křivka: V roce 1904 vytvořena švédským matematikem Helge Von Kochem – má nekonečnou délku a zároveň ohraničuje prostor s konečným obsahem.



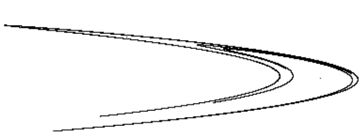
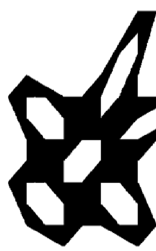
První tři iterace při konstrukci von Kochovy křivky; křivka po pěti iteracích.

- Sierpinského fraktály – trojúhelník, čtverec, Sierpinského-Mengerova houba

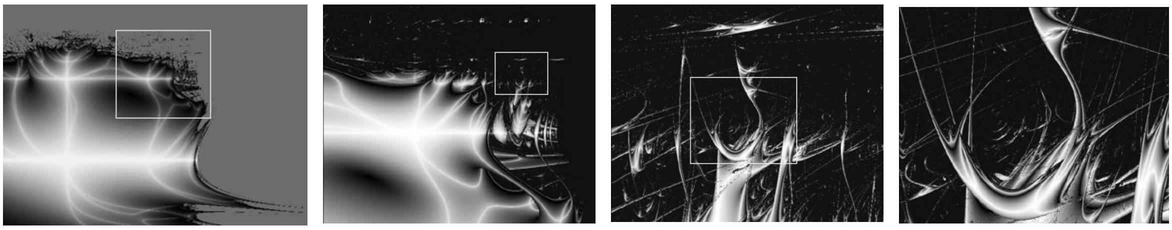
2.,3.,4. a 5. interakce S. trojúhelníku   *S. čtverec*   *S.-M. houba*

- Hénonův atraktor a Chaotický perníkář

$$x' = 1 - y + |x|$$
$$y' = x$$

* Marcus-Lyapunovov fractal



* Jak je možno z předchozích příkladů vidět, fraktály mohou mít mnoho rozličných podob, často založených pouze na drobných odchylkách v základním, většinou celkem jednoduchém vzorci. Z toho též vyplývá, že fraktálů je nekonečně mnoho a jsou nekonečně rozmanité. Tento vědní obor má tedy dle našeho názoru velkou budoucnost nejen v matematice, nýbrž i v umění.

3 Co jsme si z toho odnesli?

Hlavně zjištění, že matematika má stále mnoho neřešených příkladů (které čekají na své objevitele ;) a že výsledky některých z nich lze právem považovat za umělecká díla. Dále pak úctu k přírodě a úžas nad tím, kterak dokáže fraktálovou matematiku běžně využívat. Nu a v neposlední řadě bylo posíleno naše zaujetí matematikou, neboť nelze vytvářet fraktály a nebýt jimi zároveň unesen.

Poděkování

Supervizorovi Ing. Jiřímu Mikyškovi, BigBossovi Ing. Vojtěchu Svobodovi i všem ostatním z organizátorského týmu…;)

Reference:

[1] KRATOCHVÍL P.: *Počítačové zobrazování fraktálních objektů* SOČ, 2004/2005

[2] http://perso.wanadoo.fr/charles.vassallo/en/art/sommaire.html