# Numerické modelování dynamiky ideálního plynu

M. Franěk, Gymnázium Mariánské Lázně, franas@seznam.cz
P. Kus, SPŠE Brno, petr.data@seznam.cz
M. Šiška, Gymnázium Vídeňská, Brno, wyvern@post.cz
V. Valenta, SPŠS Odolena Voda, viktor.valenta@reparo.net

**Abstrakt:**

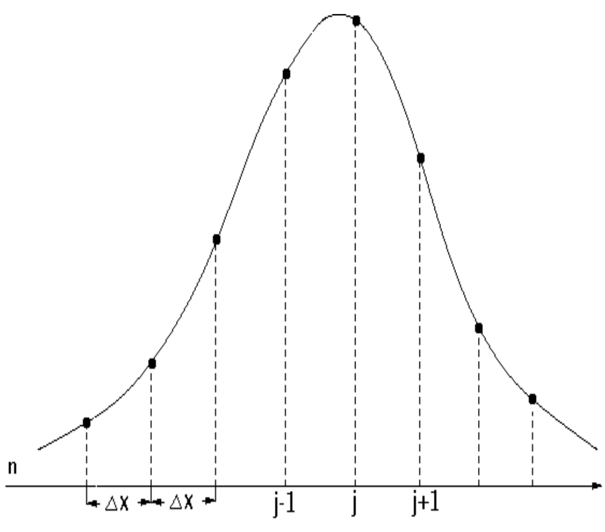
Cílem miniprojektu bylo v prostředí Matlab numericky modelovat dynamiku ideálního plynu, jejíž modelování analytickým způsobem by bylo obtížné, často i nemožné. Při postupu jsme využívali zákonů zachování a výpočetních mřížek.

# 1 Úvod

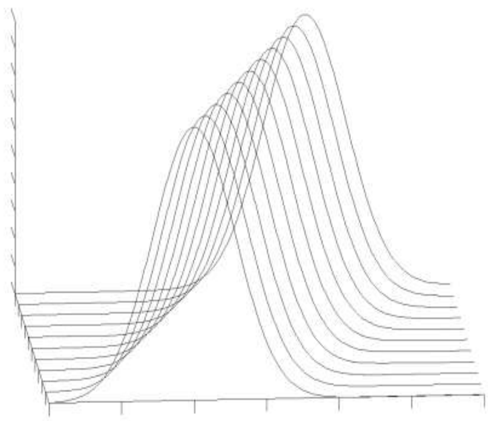
Numerické modelování řeší chování systémů, které nelze analyticky řešit, ale lze jej krok po kroku vypočítat – modelovat. K tomu se používá metoda, kdy ze stávajícího stavu zjistíme stav následující. Tímto způsobem můžeme předvídat chování systému v čase. Vzhledem k faktu, že se nepracuje s funkcemi, jako v analytické metodě, ale s čísly počítanými s určitou přesností, vzniká ve výpočtech nepřesnost. Tím se ovlivní výchozí podmínky dalších kroků, čímž se nepřesnost zvětšuje.

# 2 Numerické výpočty

Při numerických výpočtech se nepočítá se spojitými proměnými nýbrž s diskrétními (nespojitými) hodnotami.

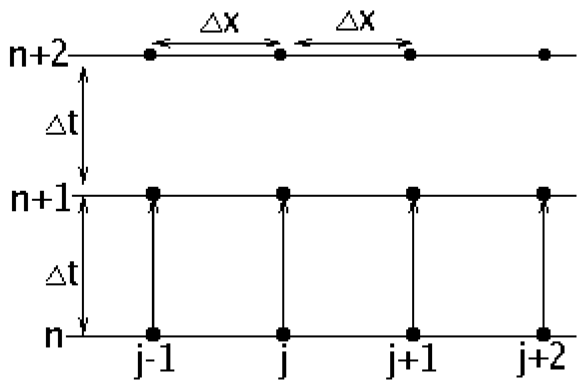



Obr. 1



Obr. 2a

Máme dán průběh funkce (obr.1), který určuje počáteční stav systému, a z této funkce vybereme určité body, provedeme tzv. diskretizaci. Diskretizované hodnoty vložíme do mřížky. Tato mřížka je pohledem na průběhfunkce „zvrchu“. Graf na obr.1 tvoří v mřížce jeden řádek, kde každý bod má hodnotu výšky *v*. Další řádky v mřížce na obr.3 jsou už vypočítané hodnoty, vypovýdají o tom, jak bude systém vypadat za určité $\Delta t$. Pohled na tyto řádky v prostoru je na obr.2.




Obr.3 Výpočetní mřížka

Diskretní hodnoty v našem případu vyvozené na začátku z grafu funkce mohou být hodnoty naměřené, z nichž můžeme vycházet a předpovědět, jak se bude děj vyvíjet v čase.

Abychom dokázali v mřížce vypočítat z řádku *n* řádek *n+1* musíme znát zákon či zákony jimž se systém řídí. Tyto zákony vychází z integrálního počtu. V našem případě, tedy pro ideální plyn jsou tyto rovnice tři - zákony zachování hmoty, hybnosti a energie:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

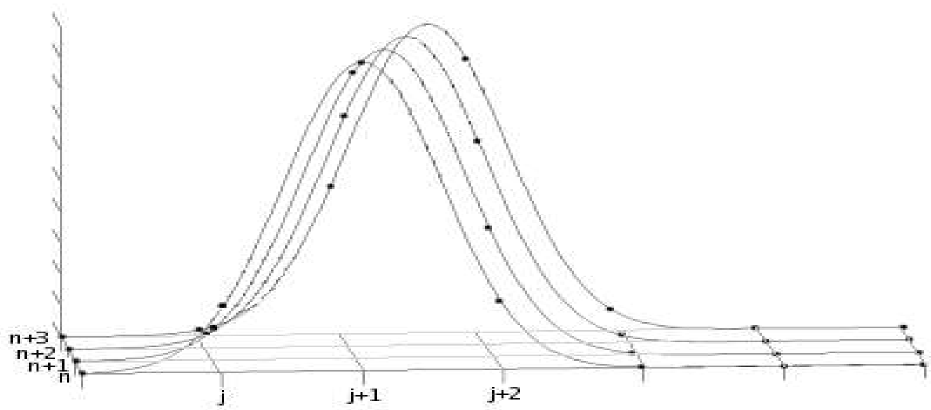
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$$

$$E_t + (u(E+p))_x = 0$$

, kde ρ je hustota, *u* je rychlost, *p* je tlak a *E* je energie.

tlak *p* vypočteme ze stavové rovnice: $E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2}$

Protože máme tři neznámé, tak musíme mít tři množiny vstupních diskrétních hodnot. Množinu pro hustotu (ρ), energii (*E*) a rychlost (*u*).



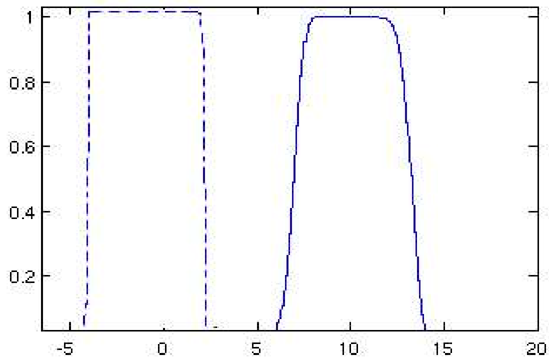

Obr. 2b

# 2 Diferenční schemta

Lax-Friedrichsovo schema

$$\frac{u_j^{n+1}-(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)/2}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0$$

se používá pro advekční rovnici, je však nepřesné – vytváří difúzi (zaoblení) viz obr. 4

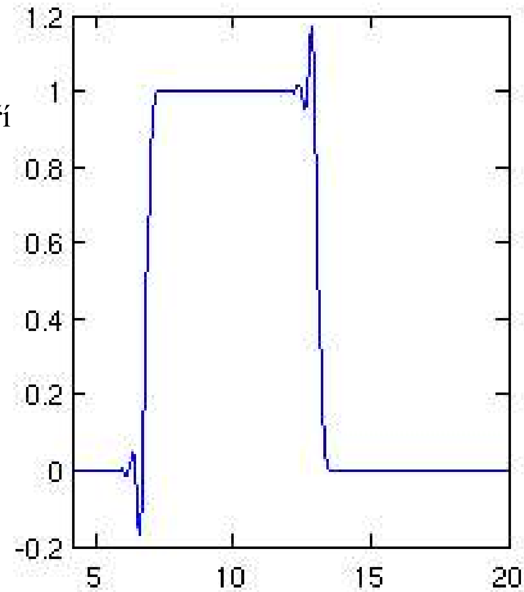



Obr. 4: Lax-Friedrichs

Lax-Wendroffovo schema

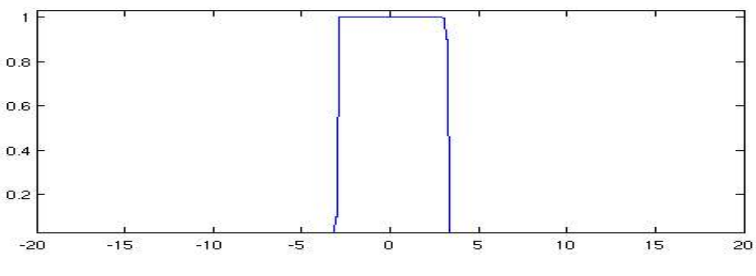
$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=\frac{a^2\,\Delta t}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

se používá také pro advekční rovnici, ale vytváří nepřesnesnost v podobě disperze (oscilace) viz obr. 5




Obr. 5: Lax-Wendorf

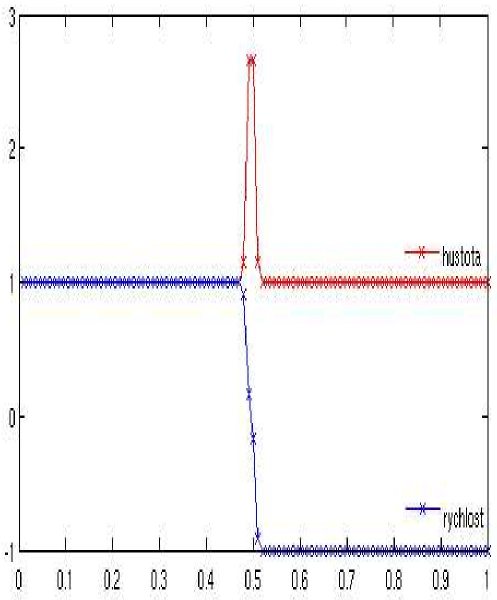
Pro složitější rovnice, jako jsou například výše uvedené Eulerovy rovnice, se využívají složená schemata LWLF*n*, tzn. *n*-krát použijeme Lax-Wendorffovo schema a jednou Lax-Friedrichsovo. Tím dosáhneme vyhlazení průběhu funkce, jak je vidět na obr.6.



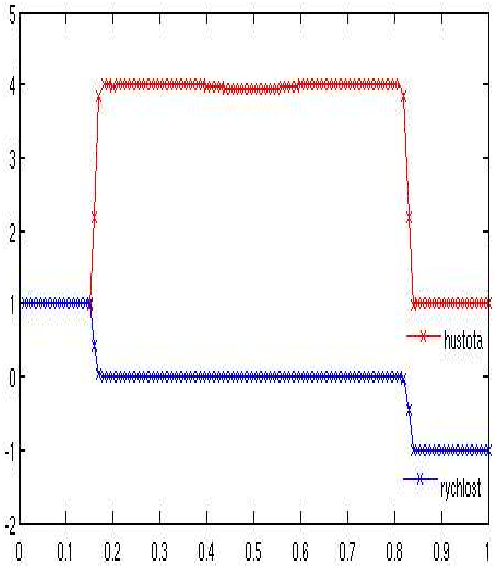

Obr. 6: LWLF4

# 3 Shrnutí poznatků pro ideální plyn

V programu Matlab jsme prováděli simulaci stavu idálního plynu při různých počátečních podmínkách. Na obrázcích 6a – 6b je vidět průběh hustoty a rychlosti v čase.




Obr. 6a: Počáteční stav




Obr. 6c: Konečný stav

# Poděkování

Naše poděkování patří zejména:

- Supervisorům Doc. Ing. Richardovi Liskovi, Csc. a Ing. Pavlu Burešovi
- FJFI ČVUT za pořádání fyzikálního týdne
- Ing. Vojtěchu Svobodovi za organizaci fyzikálního týdne.
- Praotci Čechovi, že nalezl tuto vlast.

# Reference:

[1] LEVEQUE R. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems* Cambridge UniPress 2002
[2] LEVEQUE R. *Numerical Methods for Conservation Laws* Birkhaeuser 1992
[3] KUCHAŘÍK M. *Diferenční schémata pro zákony zachování ve 3D* FJFI ČVUT 2002