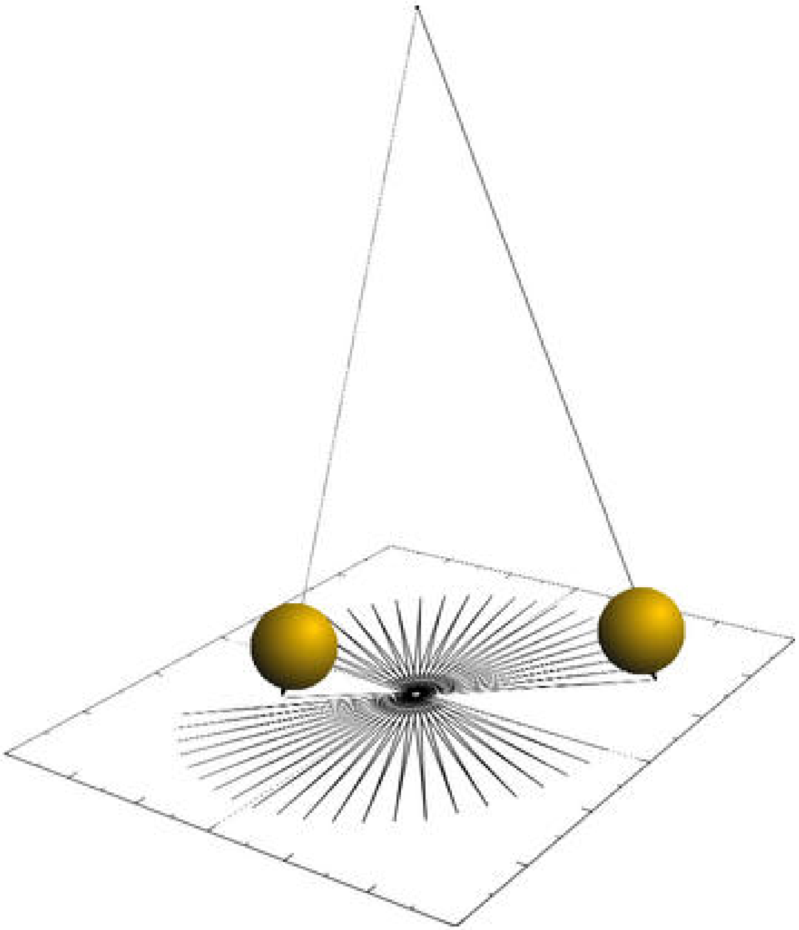
Foucaultovo kyvadlo



Porovnání aproximace používané při algebraickém řešení pohybových rovnic Foucaultova kyvadla s přesným numerickým řešením.

O co jde

- Algebraická aproximace: Zanedbává se několik veličin, které jsou v běžných podmínkách na Zemi téměř neznatelné.

- Numerické “přesné” řešení: Řešení numerickým výpočtem prováděným počítačem, při tomto řešení nedochází k zanedbávání.

Trochu matematiky

V po zanedbání některých veličin dojdeme k této relativně jednoduché soustavě diferenciálních rovnic:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 2\ w\ \sin(k)\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) - \frac{g\ x(t)}{l}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -2\ w\ \sin(k)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) - \frac{g\ y(t)}{l}$$

A bez zanedbávání vyleze tato “obluda” :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(l^2 - x(t)^2 - y(t)^2\right)^{(3/2)}} \Bigg(x(t)^3\, g \sqrt{l^2 - x(t)^2 - y(t)^2} + x(t)\, y(t)^3 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + x(t)^3\, y(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) x(t)^2\, y(t)^2 \\
&+ 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) l^2\, y(t)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) l^2\, x(t)^2 - x(t) \left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 l^2 - 2\, x(t)^2 \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) \\
&+ 2\, x(t)\, w \cos(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) \sqrt{l^2 - x(t)^2 - y(t)^2}\, l^2 - 4\, w \sin(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) l^2\, x(t)^2 - x(t)\, y(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) l^2 - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) y(t)^4 - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) l^4 \\
&+ x(t) \left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 y(t)^2 - x(t) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 l^2 + x(t)^3 \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 + 2\, w \sin(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) l^4 + 2\, w \sin(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) x(t)^4 \\
&+ 2\, w \sin(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) y(t)^4 - 4\, w \sin(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) l^2\, y(t)^2 + 4\, w \sin(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) x(t)^2\, y(t)^2 - x(t)\, g \sqrt{l^2 - x(t)^2 - y(t)^2}\, l^2 \\
&+ x(t)\, g \sqrt{l^2 - x(t)^2 - y(t)^2}\, y(t)^2 - 2\, x(t)^3\, w \cos(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) \sqrt{l^2 - x(t)^2 - y(t)^2} - 2\, x(t)\, w \cos(k) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) \sqrt{l^2 - x(t)^2 - y(t)^2}\, y(t)^2 \Bigg) = 0
\end{aligned}
$$

Řešení

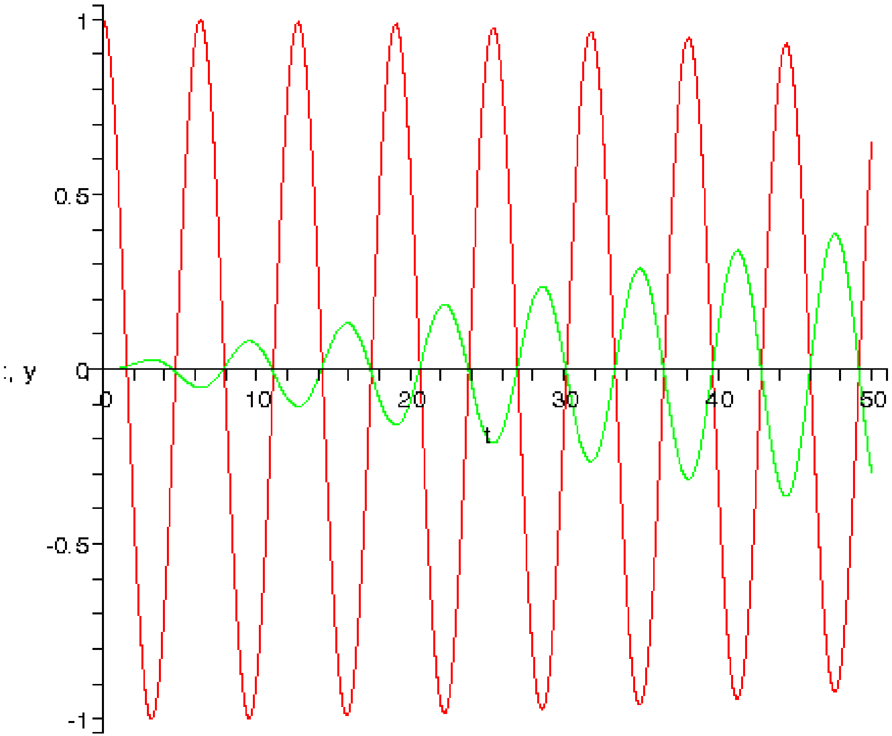
- K částečnému algebraickému řešení byl použit Maple 9

- K numerickému řešení byla použita Runge-Kutteova metoda, implementovaná v Maplu 9

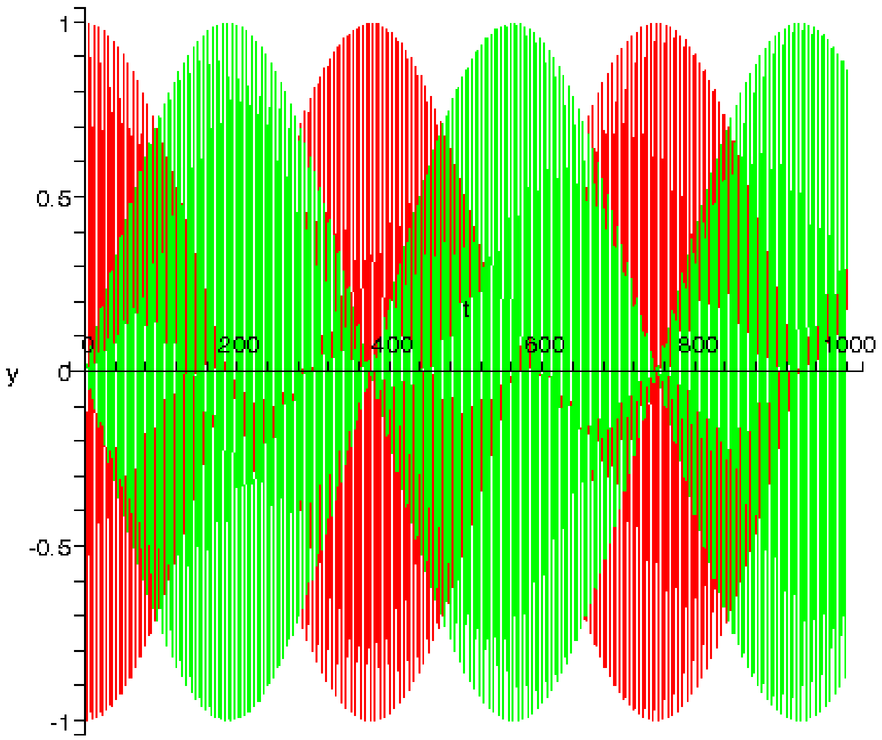
Jak vypadá výsledek

Řešení: v kartézských souřadnicích

Výsledek: graf závislosti x-ové (červená křivka) a y-ové (zelená křivka) souřadnice konce kyvadla na čase.



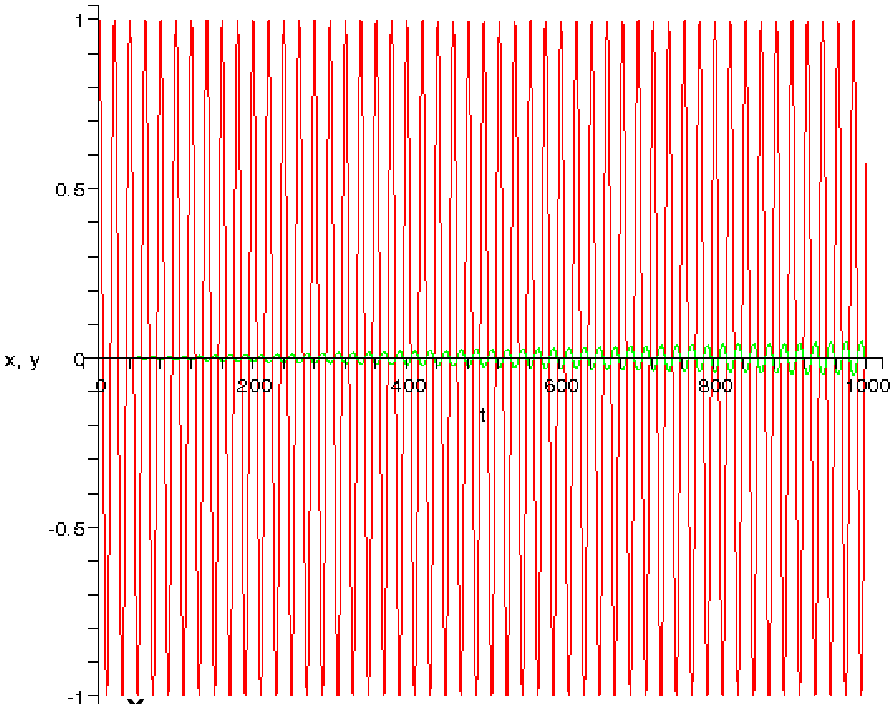
Dlouhodobý průběh v čase



Červená křivka: x-ová souřadnice konce kyvadla

Zelená křivka: y-nová souřadnice konce kyvadla

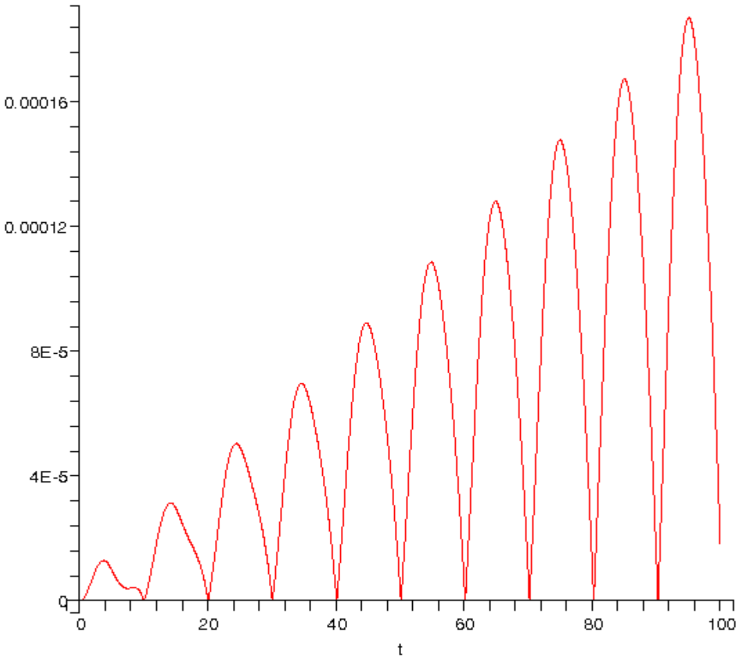
Foucaultovo kyvadlo v soustavě souřadnic spojené se Zemí



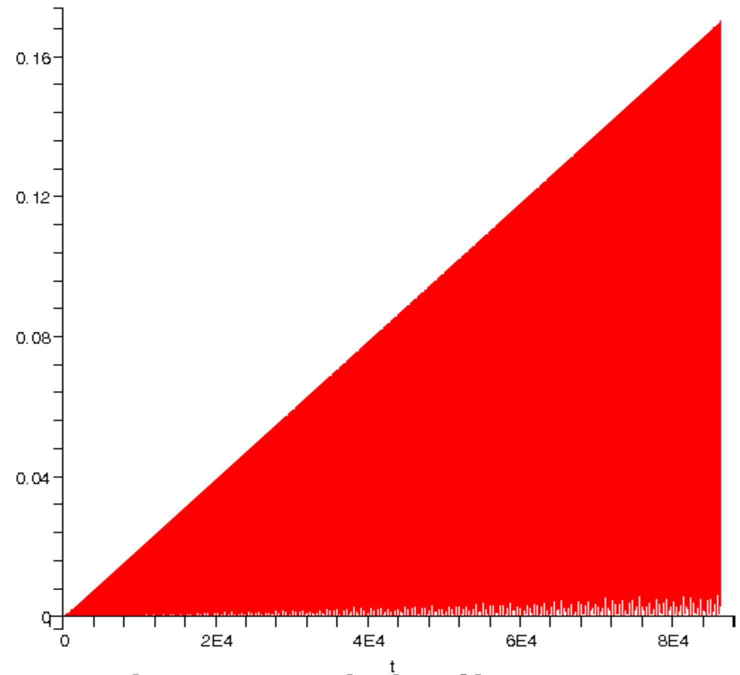
Časový interval - 1000 s
X-ová souřadnice - červená
Y-nová souřadnice - zelená

- Délka kyvadla: 100m
- Počáteční x-ová výchylka: 1m
- Doba kyvu: 10s
- Zeměpisná šířka: 45°

Rozdíl mezi přibližným a přesným výpočtem na Zemi



100 s – odchylka 0,2 mm

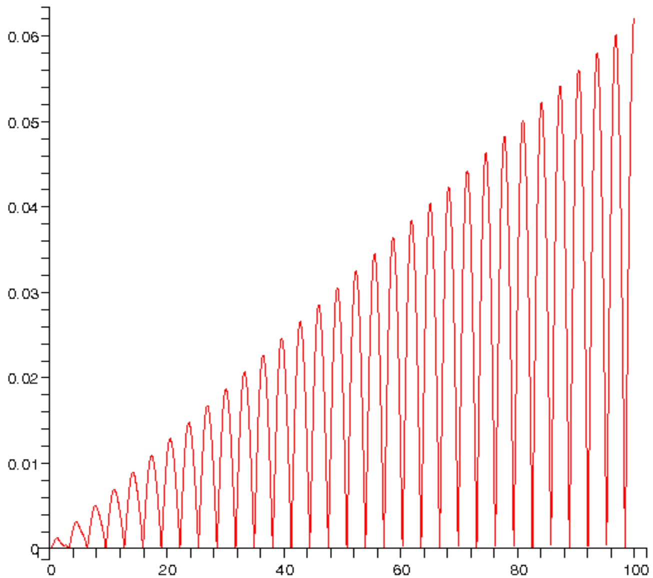


1 den – odchylka 18 cm

Křivka vyjadřuje vzdálenost konce “aproximovaného kyvadla” a “skutečného kyvadla” v závislosti na čase

Přesnost v závislosti na délce kyvadla

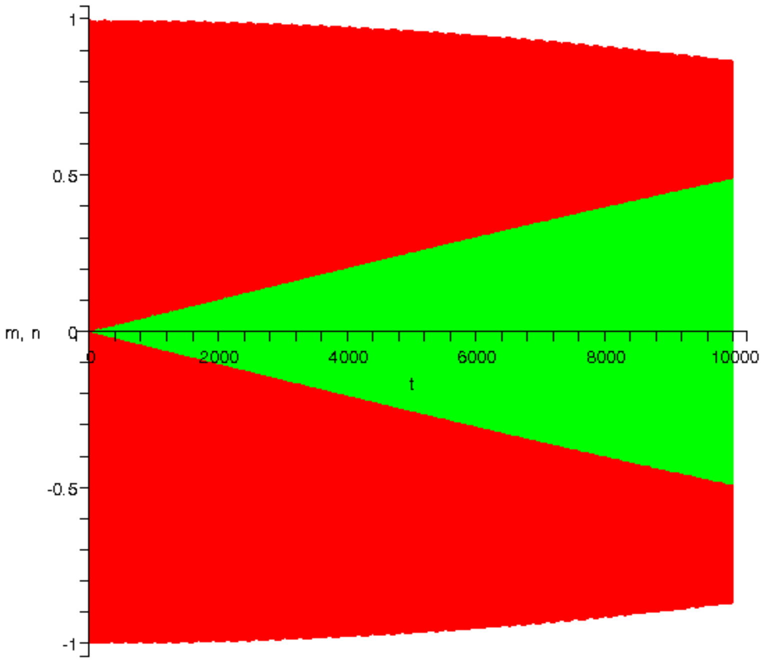
- Maximální vzdálenost “skutečného” a “aproximovaného” kyvadla se mění lineárně



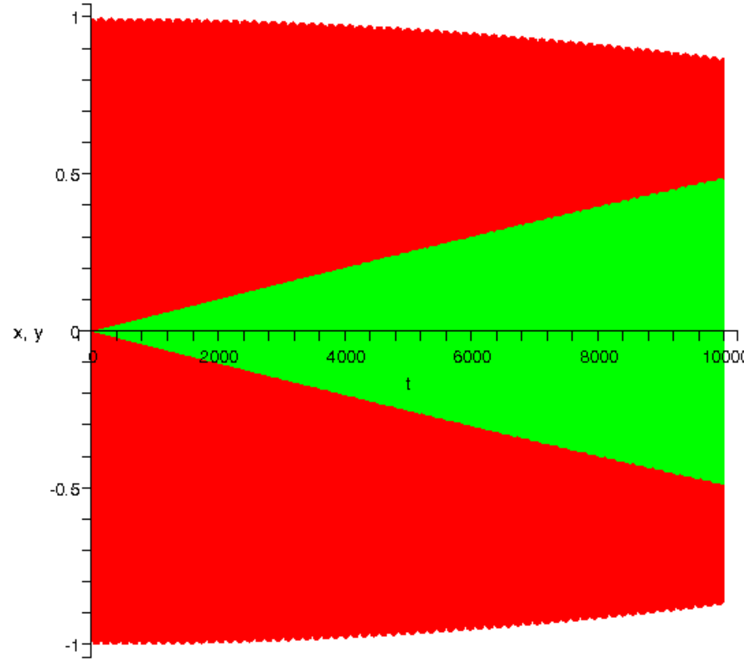
Délka kyvadla - 10m
počáteční výchylka - 1m
100 s – odchylka 6.4 cm

- Maximální vzdálenost kyvadel se zvětšuje výrazně rychleji, to ale nemá až tak zásadní vliv na výsledný rozdíl rychlosti stáčení roviny kyvu

Grafy k délce závěsu 10m



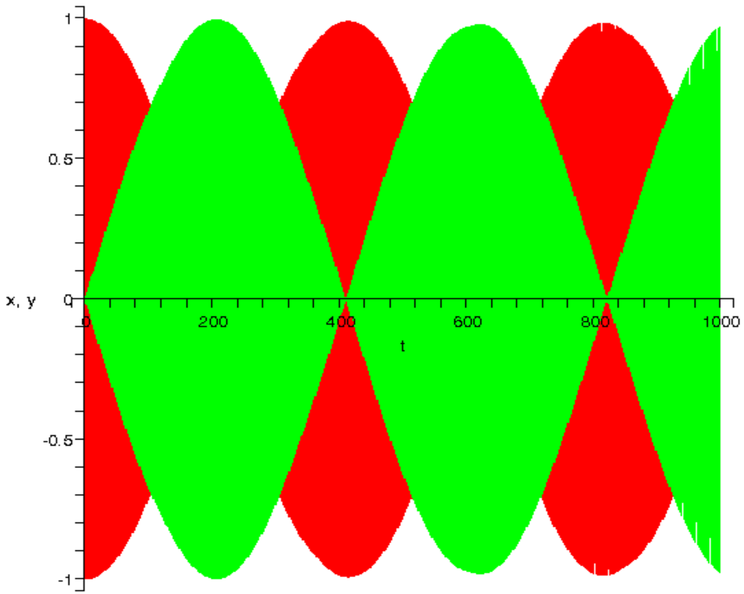
10000 s – přesná rovnice



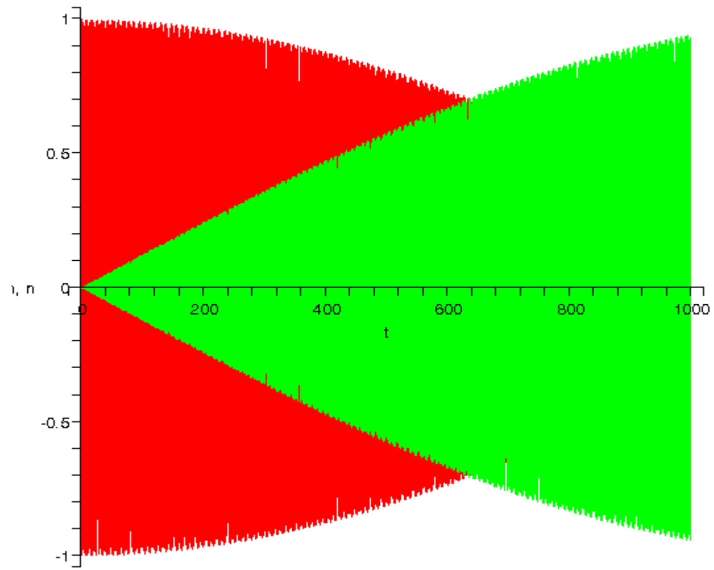
10000 s – zjednodušená rovnice

Rozdíl je téměř nepostřehnutelný

Délka závěsu 1,3m, velká úhlová rychlost otáčení soustavy



1000 s – přesná rovnice



1000 s – zjednodušená rovnice

Zde vidíme závislost x a y na čase v případě, že délka lana je 1,3m a počáteční výchylka 1m v x-ovém směru.

Závěr

- Pro velká kyvadla je odchylka zanedbatelná
- Pro kyvadla o menší délce (10m) – rozdíl patrný hlavně v “rychlosti kývání”, na rychlost stáčení roviny kyvu malý vliv
- Bežně používaná kyvadla dobře vyhovují aproximovaným rovnicím