Počítačové zobrazování fraktálních množin

L. Kadlčík*, M. Vahala**, E. Málik***

* Střední průmyslová škola Uherské Hradiště, KadlSoft@seznam.cz
** Gymnázium Plasy, vahala3@seznam.cz
*** Gymnázium Jeseník, Emik.Malik@gmail.com

Abstrakt:

Cílem našeho miniprojektu bylo seznámení se základními fraktálními množinami, způsobem jejich konstrukce a zkoumání. Dále jsme poznali některé jejich vlastnosti a paradoxy.

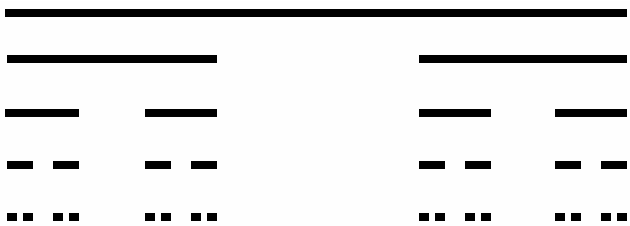
1 Úvod

Fraktál je možno definovat několika způsoby, ovšem žádný z nich není vyčerpávající a univerzální. Nejvýznačnější vlastnost fraktálu je jeho soběpodobnost, tj. že se skládá z částí, které po zvětšení vypadají jako celek.

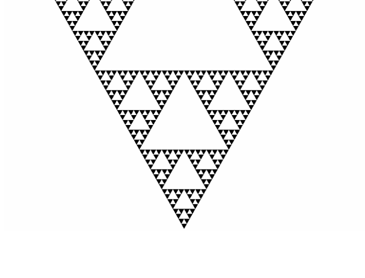
2 Klasické fraktály

Cantorova množina

Při konstrukci Cantorovy množiny začínáme s uzavřeným intervalem <0; 1>, který rozdělíme na tři stejné intervaly a vnitřek prostředního (bez krajních bodů) odstraníme. Vzniknou nám dva intervaly o třetinové délce, na něž opětovně aplikujeme předchozí postup.



S každou iterací (tj. opakování postupu dělení a odstraňování) se celková délka intervalu zmenšuje na 2/3 předchozí délky a dvojnásobně narůstá počet krajních bodů. Po nekonečném počtu iterací zůstane z výchozího intervalu <1; 0> nekonečně mnoho bodů a bude mít současně nulovou délku.

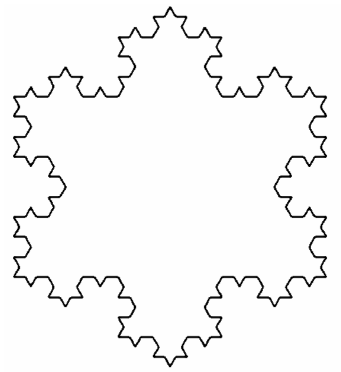


Sierpinského trojúhelník

Dalším z jednoduchých fraktálů je Sierpinského trojúhelník. Vznikne rozdělením rovnostranného trojúhelníka středními příčkami na čtyři menší, přičemž vnitřek vnitřního trojúhelníku odstraníme. Zůstanou tři menší trojúhelníky, s nimiž výše popsaný postup opakujeme.

Opakováním postupu do nekonečna dostaneme fraktál, jehož obsah je nulový a zároveň je obvod všech trojúhelníků dohromady nekonečně velký.

Kochova vločka



Výchozím objektem pro tvorbu Kochovy vločky je rovnostranný trojúhelník. Vločku poté konstruujeme následujícím způsobem: Každou stranu trojúhelníku rozdělíme na tři stejné části, přičemž prostřední část odstraníme a na jejím místě ní vztyčíme rovnostranný trojúhelník. Tento postup poté opakujeme se všemi stranami.

S každou iterací se obvod vločky zvětší na 4/3 předcházející hodnoty. Po nekonečném počtu iterací bude vločka sice obepínat konečnou plochu, ale její obvod bude nekonečný a navíc, přestože bude souvislá, po celém jejím obvodě budou vrcholy trojúhelníků, a tak k ní nebude možno v žádném místě sestrojit tečnu.

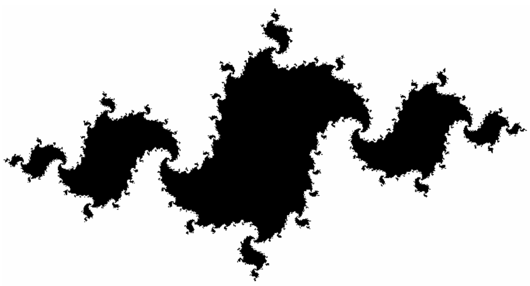
3 Fraktální množiny v komplexních číslech

Při tvorbě následujících fraktálů se jednotlivá komplexní čísla z Gaussovy roviny považují za počáteční prvky číselných řad a na základě, zdali řada konverguje k nule nebo naopak diverguje k nekonečnu se rozhoduje, zdali bod patří do množiny.

Juliova množina

Juliovu množinu vytvoříme následujícím způsobem. Nejdříve si zvolíme libovolnou komplexní konstantu c s absolutní hodnotu raději menší než 2. Poté procházíme Gaussovu rovinu a vybíráme z ní jednotlivá čísla, která slouží jako první člen (z_0) řady dané následujícím předpisem:

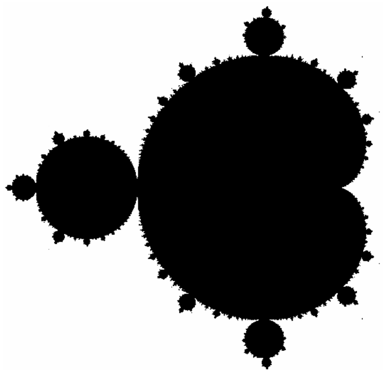
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$



Jinými slovy řečeno: Každý další člen řady získáme součtem konstanty c a druhé mocniny předchozího členu. Dále spočítáme dostatečné množství členů řady a pokud řada nediverguje k nekonečnu, patří číslo vybrané z Gaussovy roviny do Juliovy množiny.

Juliova množina je středově souměrná podle počátku Gaussovy roviny (0 + 0i). Na obrázku vidíme Juliovu množinu pro $c = 0.3 + 0.5i$.

Mandelbrotova množina



Tvorba Mandelbrotovy množiny je podobná Juliově množině (opět z Gaussovy roviny vybíráme čísla a dosazujeme je do číselné řady a pokud řada nediverguje k nekonečnu, patří číslo do množiny), ovšem s následujícími změnami: Čísla z Gaussovy roviny neslouží jako první člen z_0, ale jako konstanta c; v případě Mandelbrotovy množiny je počáteční člen z_0 roven nule.

Mandelbrotova množina je souměrná podle reálné osy a jedná se o jeden z nejsložitějších útvarů v rovině.

4 Iterované funkční systémy (IFS)

Iterované funkční systémy slouží ke generování fraktálů na základě soběpodobnosti. Hlavní myšlenkou je vytvoření jedné nebo více kopií základního objektu, na které se aplikují podobnostní transformace, tj. zrcadlení, otáčení, posun a škálování (smršťování a natahování ve směru souřadnicových os). IFS lze použít pouze na přesně soběpodobné fraktály.

5 Topologická a soběpodobnostní dimenze

Topologická dimenze udává, jakými druhy měr (délka, plocha, objem) lze popsat daný objekt. Například:

Příklad objektu	**Možné rozměry**	**Topologická dimenze**
Bod	Žádný rozměr	0
Úsečka	Pouze délka	1
Obdélník	Délka, plocha	2
Krychle	Délka, plocha, objem	3

Pro lepší pochopení podstaty soběpodobnostní dimenze si představme, že zmenšíme (z-krát) nějaký objekt a poté zkoumáme, kolik (n) kopií zmenšeniny by bylo možno umístit do objektu o původní velikosti. Soběpodobnostní dimenze poté udává vztah mezi počtem kopií (n) a zmenšením (z):

$$\dim_{\text{soběpodobnostní}} = \log_z n$$

Například dvojnásobně zmenšenou krychli je možno umístit do původní krychle osmkrát, její soběpodobnostní dimenze je tedy $\log_2 8 = 3$.

Jednoduché geometrické objekty mají soběpodobnostní dimenzi rovnou topologické dimenzi. U fraktálu je tomu jinak, jejich soběpodobnostní dimenze se od topologické liší a většinou ji ani nelze zapsat celým číslem. Čím větší je rozdíl mezi topologickou a soběpodobnostní dimenzí, tím je fraktál členitější.

Pomocí zmenšování a zkoumání, kolikrát je možno zmenšeninu umístit do původního fraktálu jsme určili, že soběpodobnostní dimenze Kantorovy množiny je $\log_3 2 = 0{,}631$, Sierpinského trojúhelníku je $\log_2 3 = 1{,}585$ a u Kochovy vločky $\log_3 4 = 1{,}621$.

6 Chaotické systémy

Chaotické systémy jsou takové systémy, které jsou velmi citlivé na vstupní parametry a za jistých okolností je jejich chování prakticky náhodné (chaotické), a to i přesto, že se v jejich předpisu nevyskytují žádné náhodné funkce nebo hodnoty.

Jednoduchým příkladem chaotického systému je logistická funkce, jež pomocí číselné řady popisuje vývoj populace v závislosti na čase. Její podoba je celkem jednoduchá:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Hodnota x udává stav populace v rozmezí 0 až 1, kdy 0 znamená úplné vyhynutí a 1 maximální počet jedinců. První člen součinu zajišťuje růst populace (množení), druhý zajišťuje zmenšování populace (vymírání v důsledku přemnožení). Konstanta r hraje ve vývoji velkou roli, jedná se o tzv. množivost, tj. míru, jak rychle se populace rozmnožuje.

Při hodnotách množivosti pod 1 populace vymře (x klesne na nulu), v rozmezí od 1 do 2 se její stav rychle ustálí, v rozmezí od 2 do 3 se po mnoha výkyvech opět ustálí, v rozmezí od 3

do 3,57 stav populace pravidelně kolísá a to s periodou, která se se zvyšováním množivosti zdvojnásobuje.
Nakonec při hodnotách nad 3 se stav populace náhodně mění. V těchto případech se chaotičnost projeví tak, že i při malé změně počáteční populace (x_0) se kolísání populace velmi změní.

7 Závěr

Fraktály a fraktální geometrie je zajímavou oblastí matematiky s rozsáhlým uplatněním, především v generování textur, počítačovém umění, analýze chaotických systému (například numerické modely vývoje počasí) nebo komprimování obrázků jejich převedením na IFS.

Poděkování

- Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT
- Nadačnímu fondu teoretické fyziky
- Energetické skupině ČEZ
- Supervizorovi Petru Bednaříkovi

Reference:

[1] PEITGEN, JÜRGENS, SAUPE *Chaos nad Fractals* Springer, 2004.
[2] PEITGEN, SAUPE *The Science of Fractal Images* Springer-Verlag, 1988.
[3] TIŠNOVSKÝ *Fraktály v počítačové grafice* www.root.cz 2006.