Výpočet plochy pomocí metody Monte Carlo

J. Čapek *, J. Daněk ** , J. Komárek ***

* Gymnázium Duchcov
** Gymnázium J. Wolkera Prostějov
*** Gymnázium Broumov

BzuX.Sk8eR@Tiscali.cz

Abstrakt

Metoda Monte Carlo se používá mimo jiné i při výpočtu obsahu složitých geometrických obrazců. Metoda je založena na počítání s náhodnými čísly. Cílem miniprojektu je seznámení se s podstatou metody a její praktické využití.

1. Popis metody

Asi nejzákladnější a první otázka, která vás napadne. **Co to je**?
Za jménem podle místa v Monaku, Monte Carlem, se skrývá celkem nová metoda výpočtu plochy většinou složitých obrazců, jejichž plocha se nedá snadno vypočítat podle vzorce. Například na výpočet plochy nějakého přírodního jevu (např. řeky) vám asi obyčejné metody stačit nebudou. Proto je tu metoda Monte Carlo, jejíž objev umožnily právě počítače a jejich výkon, který dnes mnohonásobně převyšuje jisté lidské dovednosti, jako například rychlost výpočtu složitých příkladů nebo obrovské množství úkonů. Díky tomu jsou počítače klíčové pro tuto metodu. Komu by se taky chtělo se s tím dřít několik hodin nebo dokonce dní?

2. Jak se to dělá v praxi?

Postup je takovýto: Vezmeme si libovolný obrázek (většinou toto využijeme v zeměpise - tudíž mapu) a zvolíme si obrazec nebo část, jejíž obsah chceme zjistit. Obrázek „vytečkujeme“ velkým množstvím náhodných bodů. Poté každý bod analyzujeme a zjistíme, jestli je v ploše našeho zájmu nebo ne. Bez počítače by nám to ale trvalo asi hodně dlouho. Ten si náhodně vybere z obrázku požadovaný počet bodů (například pixelů) – samozřejmě čím více, tím bude výsledek přesnější – a analyzuje jeho polohu vzhledem ke zkoumané oblasti.

Zjištěné údaje nám řeknou, kolik bodů se „trefilo“ do požadovaného tvaru. Poměřením tohoto čísla s celkovým počtem analyzovaných bodů nám nakonec dá desetinné číslo, které nám po vynásobení stem určí, kolik procent z obrázku nám zabírá oblast našeho zájmu. Další postup už ovšem nemusíme rozebírat.

Metoda Monte Carlo je založena na provádění náhodných experimentů s modelem systému a jejich vyhodnocení. Je třeba mít kvalitní generátory pseudonáhodných čísel (nejsou třeba skutečně náhodná čísla). Výsledkem provedení velkého množství experimentů je obvykle pravděpodobnost určitého jevu. Na základě získané pravděpodobnosti a známých vztahů pak spočítáme potřebné výsledky.

Tato nepřímá metoda se možná zdá složitá, ale přitom to je velmi jednoduchý nápad. Složitost z toho dělá skutečnost, že když už to má být, tak to má být přesné a z toho vyplývá nezbytnost mnoha bodů k co největšímu zpřesnění údajů. A tento způsob je jistě mnohem jednodušší, než běhat po poli se špagátem, metrem a kolíky. Většina lidských výtvorů vykvetla z lidské lenosti a tak pro tuto metodu existují jednoduché prográmky k bezplatnému stažení z internetu a pohodlnému využití doma.

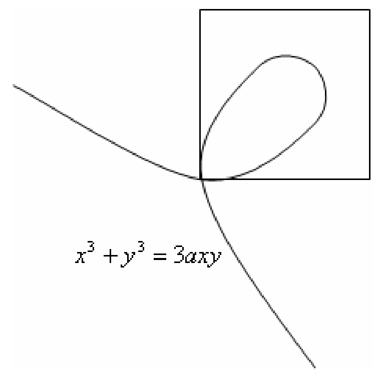
A navíc je mnohem jednodušší využít tuto metodu, než obsah složité plochy počítat přes integrál, který nám ale ani nemusí vyjít.

3. Výpočty obsahů

Pomocí metody Monte Carlo jsme spočítali obsahy několika jednoduchých i složitějších obrazců, například známého Descartova listu, vypočítali jsme Ludolfovo číslo s přesností na několik desetinných míst. Zde jsou uvedeny některé naše výsledky:

Obsah Descartova listu daného rovnicí: $x^3 + y^3 = 3axy$; a = 0,5

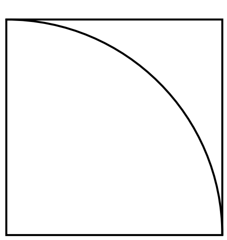
Skutečný obsah listu:	Počet náhodných čísel:	Změřený obsah:	Shoda
S = 3 / 8 = 0.375 m^2	10	0,3 m^2	80 %
	100	0,43 m^2	87,209 %
	1 000	0,35 m^2	93,33333 %
	10 000	0,3803 m^2	98,606 %
	100 000	0,37636 m^2	99,638 %
	1 000 000	0,3754 m^2	99,893 %
	10 000 000	0,3752 m^2	99,9442 %
	100 000 000	0,375 00102m^2	99,999728 %
	Nejmenší odchylka 0,000272 %		



Skutečný obsah čtvrtkruhu o poloměru 0,128 m:	Počet náhodných čísel:	Změřený obsah:	Shoda
S = 0,012867 m^2	100	0,01286 m^2	77,714 %
	1 000	0,0128677 m^2	85, 485 %
	10 000	0,0123 m^2	95,588 %
	100 000	0,01262 m^2	98,075 %
	1 000 000	0,013075 m^2	98,41449 %
	10 000 000	0,0129421 m^2	99,42509 %

Po 100 * 100 000 přepočtů:
S_1 = 0.375 099
S = 0.375 000
Shoda: 99.973 663%
Odchylka:
0.000 099
0.026 337%
Maximální 0.004 500
Minimální 0.000 000

Výpočet čísla π



$$S = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$\pi = \frac{4S}{r^2} \qquad r = 1$$

$$\pi = 4S$$

Po 100 * 100 000 přepočtů:
$\pi_1 =$ **3.141 486**
$\pi =$ 3.141 593
Shoda: **99.996 612%**
Odchylka:
0.000 107
0.003 406%
Maximální 0.012 674
Minimální 0.000 046

4. Praktické použití

Využití této poměrně nové a jednoduché metody, ke které nám v podstatě stačí generátor náhodných čísel a program na vyhodnocení údajů, je dnes velice hojné. Využívá se v mnoha oblastech lidských činností od zeměpisectví přes chemii, fyziku (kde je velice důležitým činitelem při mnoha výpočtech souvisejících použitými oblastmi této metody např. po tepelné štíty nebo aerodynamiku), přes počítače až po matematiku (výpočet konečných integrálů obzvláště multidimenzionálních integrálů (ne jen na číselné ose ale v 2D a víc) s komplikovanými hraničními podmínkami) nebo dokonce jako kalkulace risku v obchodování. Ale jednou z ceněných předností metody Monte Carlo je fakt, že její přesnost se se složitostí úkonu na rozdíl od jiných úkonů zvyšuje.

5. Výhody a nevýhody

Výhodou je jednoduchá realizace ke které je nutné jen málo prostředků. Tato metoda je při jistých matematických úkolech mnohem jednodušší a přesnější.

Nevýhodou zase relativně malá přesnost, která se dá zvýšit větším počtem experimentů. Přesnost se však i tak neblíží přesnosti jiných matematických úkonů.

6. Co z toho pro nás plyne?

Účelem této práce je seznámit Vás s novými poznatky lidského výzkumu, jak si co nejvíce a co nejefektivněji ušetřit práci. Tato nová metoda nám určitě práci a hlavně čas šetří, takže by se o ní mělo dozvědět více z Vás. Proč běhat po poli se špagátem, kolíky a metrem nebo se mořit nad integrály, když to jde jednoduše?

7. Proč zrovna Monte Carlo?

Název dostala tato metoda podle kasina a to ne jen tak náhodou. V kasinu se samozřejmě hrají hazardní hry a skoro vše je o náhodě. Jestli mi padne správné číslo, vyhraji, např. při ruletě nebo kostkách, což jsou populární hazardní hry a hrají se neustále. Kostky i ruletu můžeme považovat za jakýsi generátor náhodných čísel, což je základ pro tuto metodu. A kde je v Evropě nejznámější doupě hazardních her???

Poděkování

V první řadě bychom chtěli poděkovat vedení FJFI za zorganizování této skvělé akce, díky níž Vás můžeme seznámit s novými poznatky.

Dále musíme poděkovat našemu supervisorovi Ing. Kateřina Seinerové za vedení našeho úsilí.

A nakonec bychom chtěli poděkovat Vám za trpělivost a odvahu k přečtení naší práce.

Reference

Internet: http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_carlo_method
http://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_Monte_Carlo

Literatura: Virius, M. *Aplikace matematické statistiky: metoda Monte Carlo*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1998