Numerické modelování dynamiky ideálního plynu

M. Havrila, Gymnázium Jeseník, carver@email.cz
P. Loutocký, Gymnázium J. Wolkera, loty.shf@seznam.cz
M. Nečada, Gymnázium Jihlava, mmn_rps(at)centrum.cz

Abstrakt:

Úkolem miniprojektu bylo numericky modelovat dynamiku ideálního plynu, neboť analytické řešení dynamiky plynů je ve většině případů nemožné. Pro výpočty bylo užito zákonů zachování hmoty, hybnosti a celkové energie, dále též stavové rovnice ideálního plynu. K výpočtu a vykreslení simulace bylo užito prostředí MATLAB.

1 Úvod

Ideální plyn jest takový plyn plyn, jenž má (narozdíl od plynu skutečného) některé ideální vlastnosti: je dokonale stlačitelný, bez vnitřního tření a částice takového plynu musejí splňovat následující podmínky:

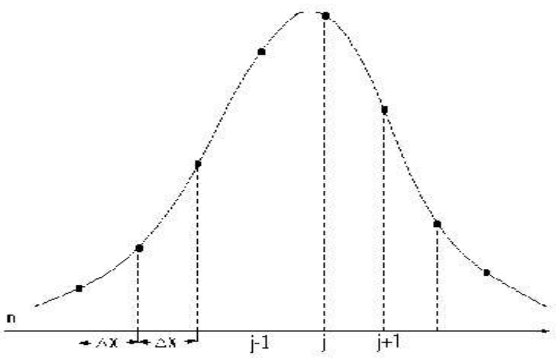
1. rozměry částic jsou zanedbatelné vzhledem ke vzdálenostem mezi nimi,
2. kromě srážek na sebe částice jinak nepůsobí,
3. celková kinetická energie částic se při vzájemných srážkách nemění.

Ideální plyn se používá ke zjednodušenému zkoumání vlastností a chování plynů při mechanických a termodynamických dějích. Pro termodynamické děje v plynech platí stavová rovnice.

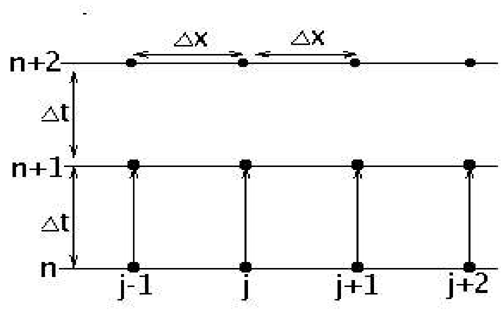
Numerické modelování se používá při simulaci fyzikálních dějů, které nelze řešit analyticky, lze je ale po jednotlivých krocích vypočítat – modelovat.

2 Numerické výpočty

Při numerických výpočtech se používají nespojité (diskrétní) hodnoty. Na začátku byl dán průběh funkce (zobrazen na grafu obr.1), který určoval počáteční stav systému.

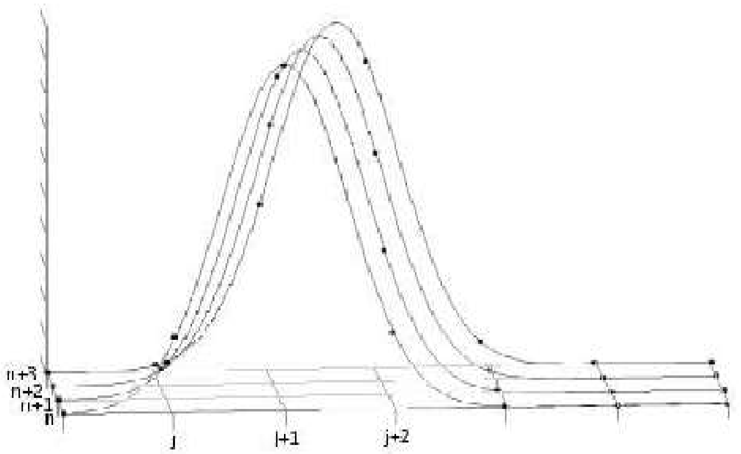


Obr. 1



Obr.3 Výpočetní mřížka

Z funkce vybereme určité body, s nimiž budeme pracovat a provedeme tzv. diskretizaci. Pro výpočty se získanými hodnotami použijeme mřížku (obr.3), což je pohled (pole) na průběh funkce v horizontálním řezu. Graf na obr.1 tvoří jednu vrstvu výpočetní mřížky. Další vrstvy v mřížce jsou tvořeny následně vypočítanými hodnotami, které vypovídají o chování systému v čase.
Pohled na jednotlivé vrstvy mřížky v prostoru je na obr.2.



obr.2

Abychom byli schopni počítat jednotlivé hodnoty v mřížce, musíme znát jednotlivé zákony, z nichž budeme vycházet.

Pro ideální plyn jsou Eulerovy rovnice popisující zákony zachování veličin v plynech.
- zákon zachování hmoty $\rho_t + (\rho u)_x = 0$
- zákon zachování hybnosti $(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$
- zákon zachování celkové energie $E_t + (u(E+p))_x = 0$

(ρ – hustota, u – rychlost, p – tlak, E – celková energie)

tlak p vypočteme ze stavové rovnice $E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2}$

(protože máme tři neznámé, musíme mít tři množiny vstupních diskrétních hodnot pro ρ, E, u; γ=1,4 zde označuje plynovou konstantu)

3 Diferenční schemata

- používají se pro advenkční rovnice

Lax – Friedrichsovo schema (nepřesné, vytváří tzv. difúzi(zaoblení))

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x}$$

Lax – Wendroffovo schema (nepřesné, vytváří disperzi (oscilaci))

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} = \frac{a^2 \Delta t}{2} * \frac{u_{j+1}^n - 2 u_j^n + u_{j-1}^n}{2 \Delta x^2}$$

pro složitější rovnice (např. Eulerovy rovnice) používáme složená schemata LWLFn, tzn., že n-krát použijeme LW schema a jednou LF.

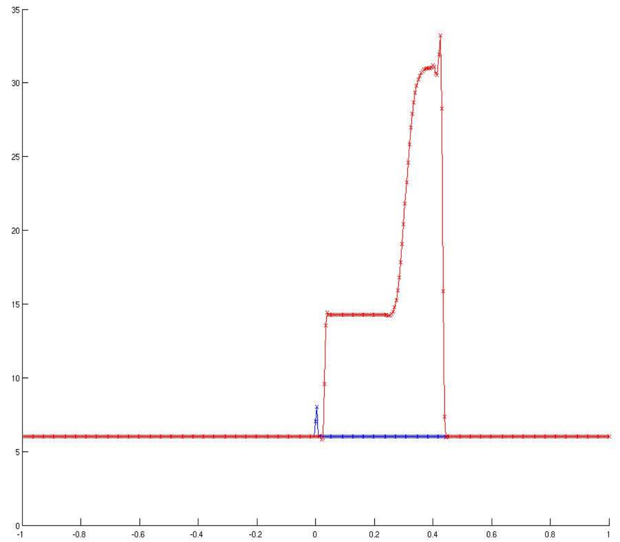
4 Výsledky a shrnutí pro ideální plyn

V programu MATLAB jsme simulovali stavy ideálního plynu při určitých daných podmínkách.

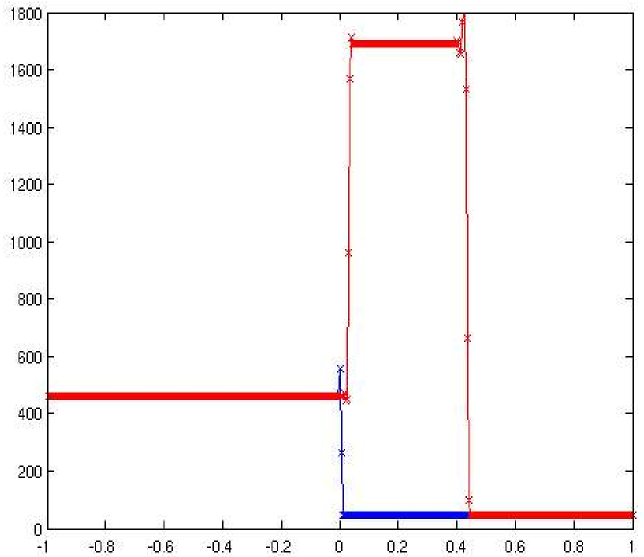
Provedli jsme test kvality numerického modelování. Test jsme řešili pomocí LF a LW schémat. Vymodelovali jsme teoretickou situaci, kdy jsou dány dva plyny, jež jsou na počátku odděleny přepážkou. Ta se při započetí výpočtu odstraní.

Výchozí podmínky byly dány např. takto:

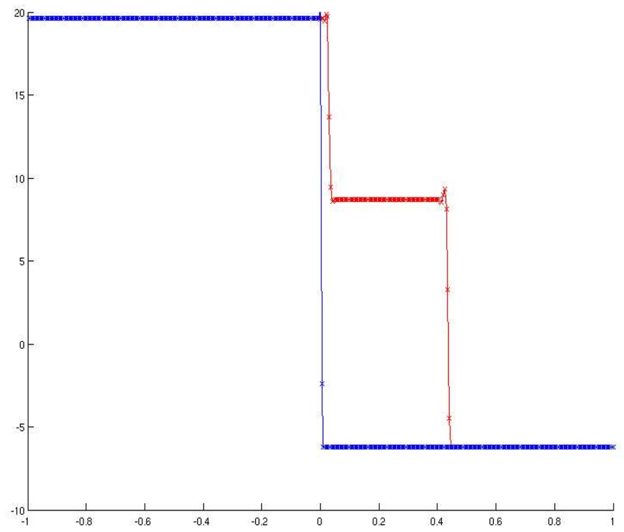
- hustota plynu vlevo 5.99924, vpravo 5.99242
- rychlost plynu vlevo 19.5975, vpravo -6.19633
- tlak plynu vlevo 460.894, vpravo 46.0950



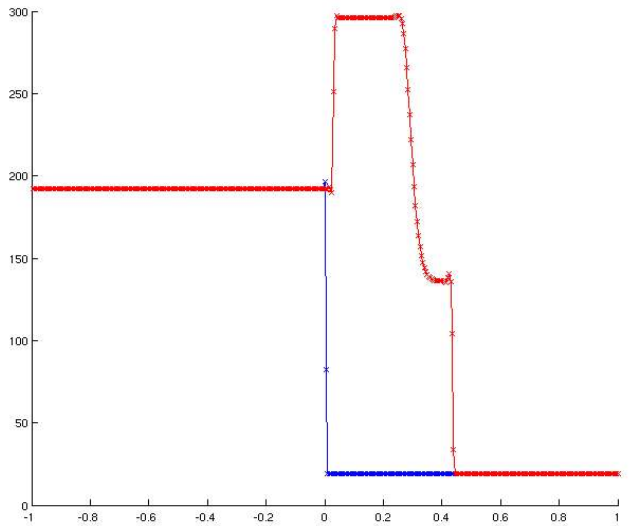
Obr. I Rozložení hustoty plynu v prostoru na počátku a v daném časovém okamžiku simulace.



Obr. II Rozložení tlaku plynu v prostoru na počátku a v daném časovém okamžiku simulace



Obr. III Rozložení rychlosti plynu v prostoru na počátku
a v daném časovém okamžiku simulace



Obr. IV Rozložení vnitřní energie plynu v prostoru na
počátku a v daném časovém okamžiku simulace

Při numerickém modelování fyzikálních systémů se setkáváme s řadou nepřesností, jež jsou způsobeny omezenou přesností numerických hodnot a nahrazením derivací diferenciacemi.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat FJFI ČVUT v Praze a Ing. Vojtěchu Svobodovi za pořádání Fyzikálního týdne. Zvláštní poděkování patří našim supervizorům Doc. Ing. Richardu Liskovi, CSc. a Ing. Milanu Kuchaříkovi, že to s námi zvládli a zasvětili nás do problematiky.

Reference:

[1]Toro,F.E.: Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction (Hardcover)