Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace ve fyzice

V. Slinták, J. Erban, P. Fojtů
SPŠ Uherské Hradiště, Gymnázium Dr. E. Holuba Holice,
Gymnázium Benešov
vlastik-vlastik@seznam.cz

Abstrakt:
Počítačové algebraické systémy (PAS) jsou programy, zabývající se symbolickou matematikou. Hlavní funkcí PAS je manipulace s matematickými výrazy v symbolické formě. V mnoha vědeckých oborech je zapotřebí počítat s velmi rozsáhlými výrazy, kde již lidský faktor nestačí. Narozdíl od lidí totiž počítač málokdy dělá chyby a hlavně má vyšší výpočetní výkon. Za těmito účely vzniká výkonný matematický software, který je schopen řešit i ty nejnáročnější výpočty.

1 Úvod

Jistě každý z nás se setkal s matematickou či fyzikální úlohou, kterou nemohl snadno vyřešit. Oproti předchozím generacím máme však výhodu v tom, že některé společnosti se zaměřily na vývoj algebraických aplikací. Tyto aplikace nám pomáhají zjednodušovat složité výrazy, rychle nacházet kořeny složitých rovnic, počítat s parametry, vytvářet 2D i 3D grafy...

Mezi nejrozšířenější programy patří jistě komerční Mathematica[1] či Maple[2], či volně dostupná Maxima [3].

2 Mathematica

Program Mathematica umožňuje řešit algebraické výrazy nebo dokáže pracovat s numerickými výrazy. Jeho nezbytnou součástí je programovací jazyk, se kterým se dají řešit složité grafy, případně i vytvářet animace.

Výbornou pomůckou je rozsáhlý a komplexní help, ve kterém najdete i popisy jednotlivých funkcí. Existuje možnost rozšiřujících balíčků, které přidávají a definují nové funkce a konstanty. Tyto balíčky se většinou využívají externě a při každé práci se musí načítat znovu.

Grafy jsou samotnou kapitolou v tomto programu, lze vymodelovat prakticky vše. Výsledné modely mohou být exportovány do nejrůznějších grafických formátů, kde se mohou dotvořit potřebné efekty.

Na rozdíl od numerických programů, můžeme v Mathematice řešit i rovnice s neznámými a parametry tak, aby výsledek byl zachován s parametrem, případně i s dalšími proměnnými.

Rozdíly mezi numerickým a symbolickým zápisem, který používají algebraické programy:

Numericky	***Symbolicky***
2/6 → 0,333333	2/6 →1/3
3 + 6 = 9	2x + 3x = 5x
Cos(3,14159) = -0,99999	Cos(a) = -1

Program Mathematica můžeme lehce použít i jako kalkulačku, např. pro výpočet faktoriálů jednotlivých čísel, a to dvojím způsobem:

```
In[1]:=  30!
Out[1]= 265252859812191058636308480000000
```

Případně i v této podobě:

```
In[2]:=  N[30!]
Out[2]= 2.6525285981219107 x 10^32
```

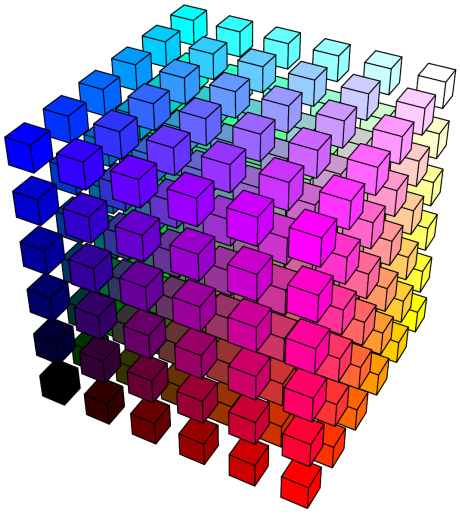
Pro výpočet rovnic můžeme použít např. funkci **Solve[]:**

```
In[4]:=  Solve[x^2 - 4x + 15 == 0, x]
Out[4]= {{x → 2 - i √11}, {x → 2 + i √11}}
```

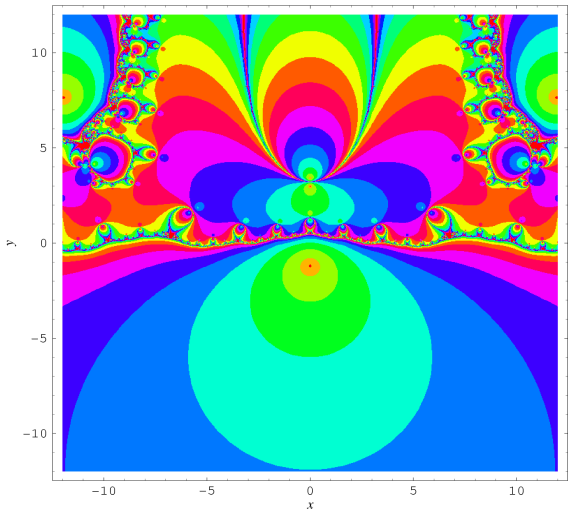
Parametr „x^2 - 4x + 15 == 0“ nám představuje danou rovnici, druhý parametr zobrazuje hledanou neznámou.

Grafika

Práce s grafikou je v tomto softwaru velmi kvalitně vyřešena *(v základní verzi boužel nelze otáčet náhledem, v tomto ohledu je lepší Maple[2])*, lze kreslit 2D i 3D grafy, prostorové útvary rozličných tvarů a např. počítat s fraktály.



Obr. 1 Útvar zvaný CUBOID



Obr. 2 Ukázka fraktálů

Na obrázku číslo 1 se nachází CUBOID, jehož zdrojový kód se nachází na další straně. Obr. 2 ukazuje fraktál vygenerovaný právě Mathematicou.

```
Show[
  Graphics3D[
    Table[
      {RGBColor[i, j, k], Cuboid[10 {i, j, k}]}, {i, 0, 1, .2}, {j, 0,
        1, .2}, {k, 0, 1, .2}]], Lighting → False, Boxed → False]
```

Ukázka práce s Mathematicou

Nejenom matematické operace se mohou řešit v Mathematice, ale i fyzikální rovnice a příklady. Pěkně a poměrně lehce se dá vypočítat vodorovný vrh:

Definujeme si funkci která bude počítat podle známého vzorečku pro vodorovný vrh počáteční výšku předmětu:

```
h[t_, H_, g_] := H - 1/2g t^2
```

Jak dlouho bude předmět letět? Tuto informaci zjistíme jednoduchým výpočtem:

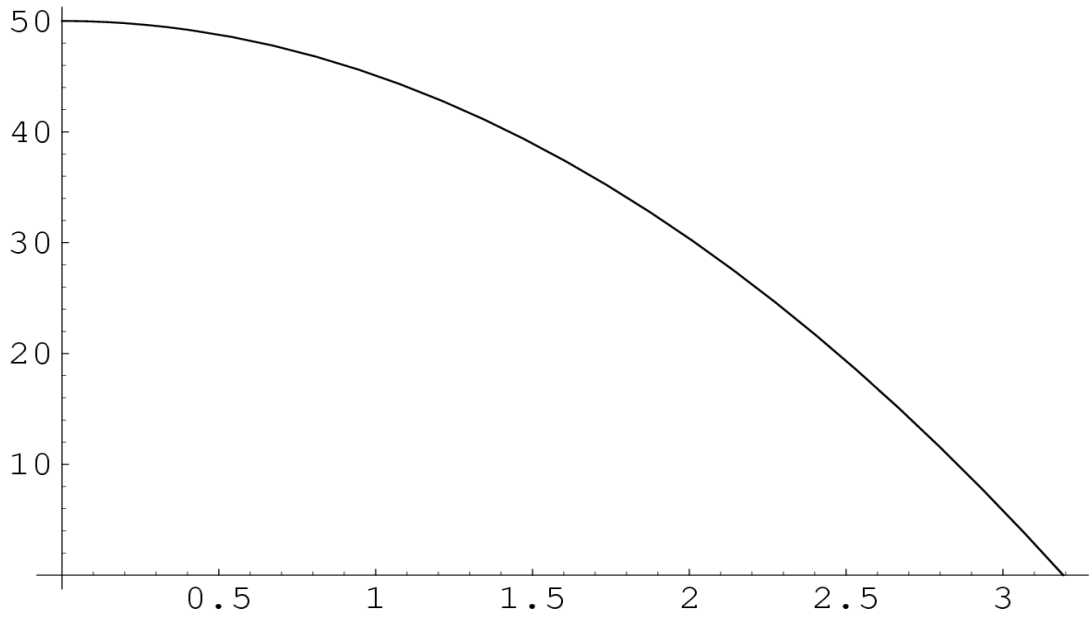
```
tdopadu[H_, g_] := Module[{sol}, sol = Solve[h[t, H, g] == 0, t];
  td = Cases[ t /. sol, x_ /; x > 0]; td[[1]]]
```

Oba dva předchozí výpočty využijeme v následujícím příkazu, který nám vykreslí přehledný dvourozměrný graf:

```
graf[H_] := Module[{g},  g = 9.81; Plot[h[t, H, g], {t, 0, tdopadu[H, g]}]]
```

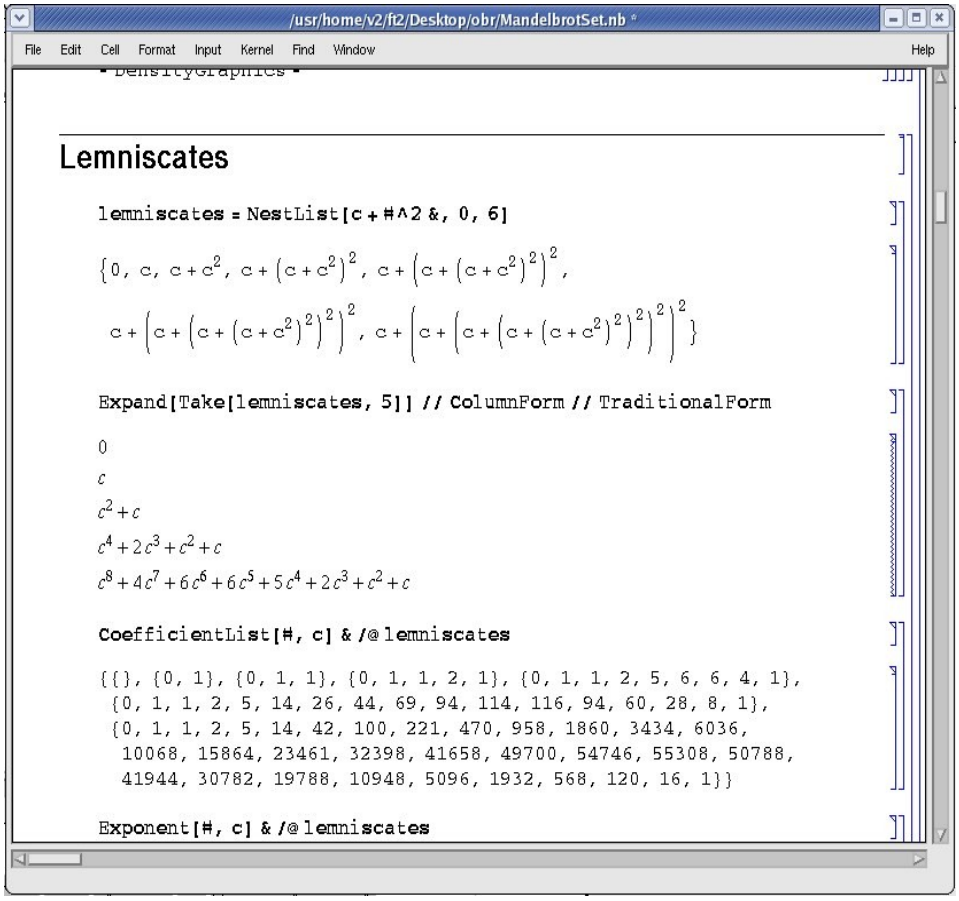
A nyní již výše zmíněný graf:

```
graf[50]
```



Notebooky

Notebooky jsou další užitečnou věcí, kterou Mathematica přináší. V těchto souborech uschovává veškeré své výrazy, které uživatel sepsal, dále je může komentovat. Tyto soubory můžeme považovat za dynamické, jelikož funkce mohou být redefinovány, případně i změněny hodnoty *(rozmezí, hodnoty konstant ...)*.



Obr. 3 Ukázka notebooku vytvořeného Mathematicou

3 Shrnutí

Algebraické systémy jsou jistě zajímavou alternativou pro výpočet matematicko-fyzikálních příkladů. Díky větší výpočetní kapacitě jsou schopny vypočítat dané příklady v mnohanásobně kratší době.

Poděkování

Děkuje našemu supervisorovi, Dr. Ing. Milanu Šiňorovi, který nás provedl taji algebraických systémů. Dále FJFI ČVUT, která poskytla prostory a technické zázemí. V neposlední řadě Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc.

Reference:

[1] WOLFRAM RESEARCH INC. *Mathematica,* http://www.wolfram.com/

[2] MAPLESOFT *Maple,* http://www.maplesoft.com/

[3] *Maxima, a computer algebra system,* http://maxima.sourceforge.net/