Numerické modelování proudění mělké vody

M.Výška, M. Macháček, O. Kraus
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, Trojanova 13, Praha
martin.vyska@centrum.cz machacekmatous@gmail.com
ondrej.kraus@gmail.com

Abstrakt

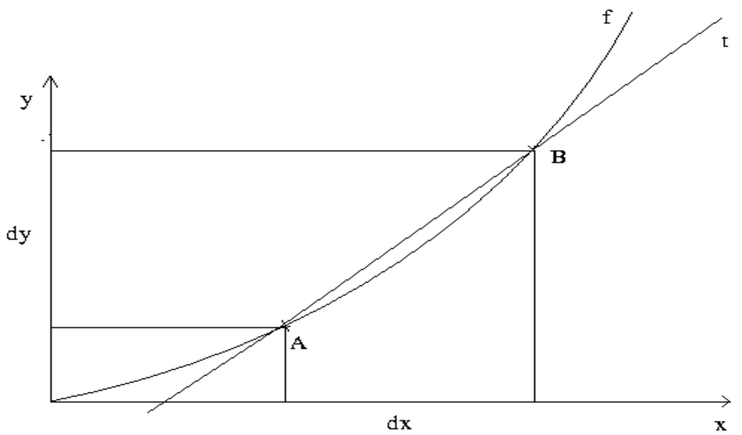
Naše práce se zabývá matematickým vyjádřením chování mělké vody. Naším cílem bylo vytvořit simulaci chování mělké vody za různých počátečních podmínek. K simulaci těchto jevů jsme použili program MATLAB. Podařilo se nám zjistit, co následuje po protržení hráze, co se stane, když se srazí vlny jdoucí proti sobě nebo jak se chová vlna pohybující se určitou rychlostí.

1 Úvod

Naším úkolem bylo simulovat chování mělké vody za různých počátečních podmínek. Pokusili jsme se simulovat situaci po protržení přehrady nebo srážky proti sobě jdoucích vln.

2 Matematika vln

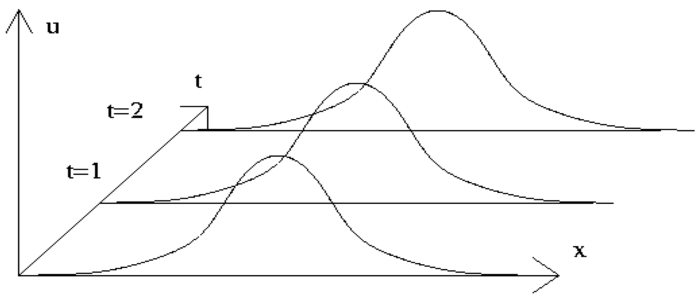
Základním nástrojem pro popisování spojitého děje ve fyzice je differenciální počet, který našli nezávisle na sobe Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Liebnitz. Je to metoda, jejíž pomocí můžeme rozdělit takový děj na nekonečně malé úseky a s nimi pracovat.



Na obrázku vidíme funkci f a její sečnu t, procházející body A a B. Pokud by jsme bod B po křivce fce f přibližovali k bodu A a tím zmenšovali intervaly dx a dy, přímka t by se stále víc blížila tečně fce f v bodě A, a tudíž úhel, který svírá přímka t s osou x by se stále více blížil okamžitému sklonu tečny fce f v tomto bodě A. Pokud položíme $\Delta x \rightarrow 0$ a spočítáme limitu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, získáme funkční závislost okamžitého úhlu který svírá tečna grafu fce f v bodě x na x. Tato limita se označuje jako $\frac{df(x)}{dx}$ a tento postup jako derivace fce f. Derivace mají kromě určení směrnice křivky velký význam ve fyzice, např. okamžitá rychlost je definována jako $v=\frac{ds}{dt}$ kde ds je nekonečně malá změna dráhy a dt je nek. malá změna času. Obdobně pro zrychlení platí $a=\frac{dv}{dt}$

apod.
Mnohem častější z pohledu reálného světa jsou ovšem funkce s více proměnými než s jednou, třeba se dvěma. Můžeme mít např. fci u(x,t). Grafem takové fce je nějaká plocha a proto když zjišťujeme směrnici této fce musíme vždy říct ve směru jaké osy směrnici určujeme. Jako přirovnání lze uvést příklad horského úbočí, kde sklon kopce záleží na směru, kterým se vydáme. Proto můžeme derivovat derivovat fci u podle x nebo podle t a druhá proměnná je konstanta. např.u fce u= xt , derivace podle x: $\frac{\partial u}{\partial x}=t$ a podle t: $\frac{\partial u}{\partial t}=x$ udávají vždy sklon fce ve směru osy x a ve směru osy t. Těmto derivacím se říká parciální derivace a rovnicím, které je obsahují parciální differenciální rovnice. A protože těmito rovnicemi se řídí pohyb vody, dříve než přikročíme k vlastnímu tématu tohoto článku, podíváme se ještě na tyto rovnice.

Parciální diff. rovnicí je např. rovnice $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ kde a je parametr. Je důležité si uvědomit, že když v obyčejných rovnicích hledáme konkrétní hodnotu neznámé a v obyč. differenciálních rovnicích (ty obsahují pouze jednu derivaci) hledáme funkci jedné proměnné , u parc. diff. rovnic hledáme funkci dvou proměnných. Proto pro řešení takové rovnice musíme ještě znát počáteční podmínky, tzn. např. tvar fce u(x,t) v čase t = 0. Tato rovnice konkrétně se nazývá advekční rovnice a popisuje šíření vlny v daném prostředí. Rychlost toho, jak se vrchol této fce u(x,t) putuje v čase (podél časové osy) udává parametr a. U této fce všechny body putují stejnou “rychlostí” a, a tudíž vlna zachovává svůj tvar.



Pro modelování tohoto děje na počítači musíme zavést nějaké schéma, podle kterého bude počítač vykreslovat pohyb vlny. Je výhodné že u této rovnice známe i analytické řešení (což se nedá říct o většině parc. diff. rovnicích) a tudíž můžeme kontrolovat přesnost tohoto numerického řešení podle daného schématu.
Na ose x určíme interval -b až b a tento interval rozdělíme na N dílků (co největší N) . Časovou osu t rozdělíme také na dílky. Dílky na ose x budou pojmenovány jako i, i+1, i+2 .... dílky času jako n, n+1, n+2 ....

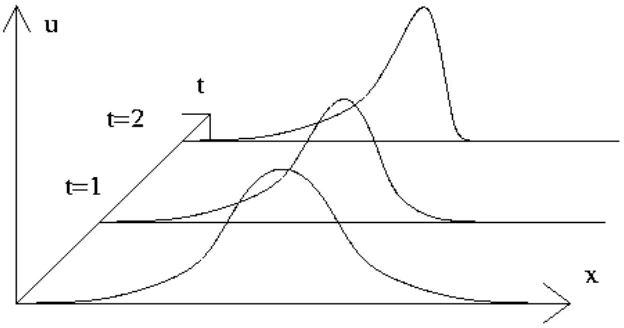
Pak můžeme psát, že: $\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}$ kde u_i^{n+1} je hodnota fce u(x,t) v místě i a v čase n+1 (platí $u_i^n\approx u\left(-b+i\Delta x,n\Delta t\right)$

Analogicky můžeme psát $\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}$ aproximace jsou zde proto, že Δx a Δt nejsou nekonečně malé. Nyní se dostáváme k samotné metodě výpočtu. Zavedeme si fci u_0 , pro kterou platí u(x,0)= u_0 (x)

Ještě potřebujeme fci x(i)=(-b+ Δx (i-1)) tudíž: u_0 (x) = u_0 (-b+ Δx (i-1)) = u_i^0
Nyní aproximace dosadíme do rovnice:
$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}=0$ a vyjádříme člen u_i^{n+1}

$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$ pokud nyní v této rovnici dosadíme n=0 dostaneme: $u_i^1 = u_i^0 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^0 - u_i^0\right)$ a u_i^0 známe, to je totiž naše funkce v čase 0. Pomocí ní uvedeným postupem vyjádříme funkci u(x) v čase n=1 a z té zase fci u(x) v čase n=2 atd. To je samozřejme nesmírně zdlouhavý výpočet, ovšem to počítači nečiní problém. Tomuto schématu se říká diferenční schéma. Je nutné dodat že tímto postupem nezískáme vlastně přesnou fci u(x) v čase n, ale množinu čísel kde k číslu u je přiřazeno číslo x v čase n, a těchto číselných údajů je na každém časovém úseku N. Také toto numerické řešení je pouze přibližné.

Složitější už je tzn. burgersova rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ kde rychlost pohybu vlny je dána v každém okamžiku výškou vlny a tudíž horní část se pohybuje rychleji než spodek a tudíž vlna mění svůj tvar. Důslekem je vznik. tzv rázové vlny, kterou můžeme pozorovat např. když letadlo překonává rychlost zvuku. Vlna vypadá asi takto:



Pokud chceme u takové rovnice sestavovat diferenční schéma, je výhodné zavést fci f(u) tak aby se dalo psát $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$

$\partial f(u) = u\,\partial u$ a integrací $f(u) = \int u\,\partial u = \frac{1}{2}u^2$

Je nutné dodat, že pokud je rychlost a (u) kladná, musíme použít v diff. schématu derivaci zleva, tzn. $\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$ pokud je rychlost záporná, použijeme derivaci zprava (viz def. na začátku článku). Potom v daném diferenčním schématu nahradíme členy v závorce a použijeme derivaci zleva, protože rychlost u je zřejme kladná. také u advekční rovnice platilo, že a < 0.

$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_i^n - f_{(i-1)}^n\right)$ výpočet, jelikož známe konkrétní fci f(u) bude ovšem stejný.

Po dlouhém úvodu se nyní dostáváme ke konkrétním rovnicím pro proudění vody. Ta je popsána 4-mi veličinami rychlost **v**, čas t, dráha x a výška hladiny h. Platí $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} = 0$ kde g je tíhové zrychlení.

Když vytváříme diferenční schéma u těchto rovnic, pro modelování vody, nahradíme si:
h = u_1 a hv = u_2 nyní můžeme rovnice přepsat do tvaru:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial (u_2)}{\partial x} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial (u_2)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{u_2^2}{u^1} + \frac{1}{2}gu_1^2\right)}{\partial x} = 0$$

Zavedeme fci F(u_1, u_2) a dosadíme: $\frac{\partial(u_2)}{\partial t}+\frac{\partial F(u_1, u_2)}{\partial x}=0$

Diferenční schémata budou nyní vypadat takto:

$$u_{1i}^{n+1}=u_{1i}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{2_{i+1}^{n}}-u_{2_{i}^{n}}\right) \quad \text{a} \quad u_{2i}^{n+1}=u_{2i}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1}^{n}-F_{i}^{n}\right)$$

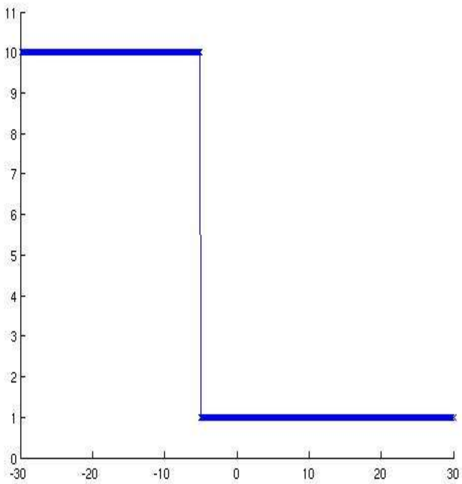
Opět, pokud chceme počítat konkrétní čísla musíme znát počáteční fce u_{01} (x) v čase t = 0 a u_{02} (x) v čase t = 0.

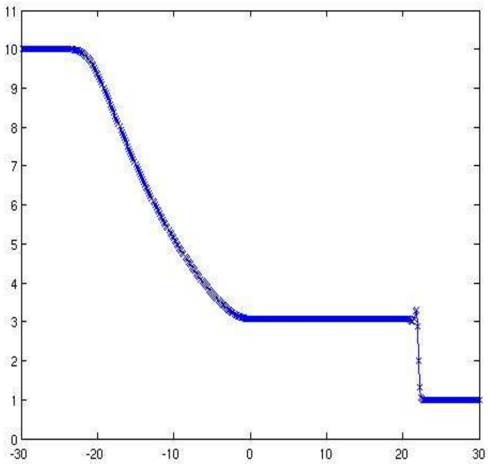
Toto dosazení do schématu u složitějších rovnic, už ale záleží na tvaru počátečních podmínek, a tudíž toto schéma které jsem zde použil je jen pro specifické případy. Obecně používáme a kombinujeme několik druhů schémat, jak kvůli přesnosti, tak kvůli stabilitě výpočtu, aby nenarůstala chyba. Nicméně způsob dosazování do těchto schémat je velmi podobný. Jako příklady uvedu Lax-Friedrichovo schéma pro advekční rovnici, které je stabilní pro kladnou i zápornou rychlost:

$$\frac{u_{i}^{n+1}-\frac{1}{2}\left(u_{i+1}^{n}+u_{i-1}^{n}\right)}{\Delta t}+\frac{a}{2\,\Delta x}\left(u_{i+1}^{n}-u_{i-1}^{n}\right)=0$$

Tyto schémata jsme použili pro modelování pohybu mělké vody, které se dá provést např. v programu Matlab.

Obrázky ze simulace protržení přehrady. 1. obrázek představuje přehradu, 2. pak situaci několik sekund po protržení kdy se vepředu vytvoří rázová vlna a za ní vlna zředění.





3 Shrnutí

K řešení našeho problému jsme museli použít parciální diferenciální rovnice a s tím spojenou parciální derivaci(tzn. derivaci funkce s více proměnnými). Využili jsme programu MATLAB pro snadné grafické znázornění problému a jeho řešení. Podařilo se nám úspěšně odvodit diferenční schémata pro tyto parc. diff. rovnice a simulovat rázové vlny, zajímavým případem byla situace po „protržení“ hráze, kdy se hladina vyrovnávala velmi rychle a vznikla rázová vlna.

Poděkování

Poděkování za laskavý dohled a pomoc našim supervisorům Doc. Ing. Richardu Liskovi, Csc. a Ing. Milanu Kuchaříkovi.