Cavendishův pokus: Určení gravitační konstanty „Vážení Země”

Jiří Krist - Mendlovo gymnázium, Opava, SO2@seznam.cz
Tereza Steinhartová - gymnázium J. K. Tyla Hradec Králové, SteinT@seznam.cz

Abstrakt:
Cílem Cavendishova experimentu je určení gravitační konstanty prostřednictvím měření sil v řádech 10^{-10} N na torsních vahách. Pomocí gravitační konstanty lze určit nejen gravitační sílu působící mezi dvěmi tělesy, ale i hmotnost libovolného tělesa, známe-li gravitační zrychlení a vzdálenost tělesa v daném místě.

1. Úvod

Newtonův gravitační zákon nám říká, že dvě tělesa se navzájem přitahují gravitační silou, která je přímo úměrná součinu hmotností obu těles a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti. V matematickém vyjádření této síly se nám ale musí objevit gravitační konstanta, kterou jsme se rozhodly změřit. Vztah pro výpočet této síly je pak

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

kde G je právě gravitační konstanta, m_1, m_2 hmotnosti těles a r jejich vzdálenost.

Experiment je rovněž nazýván Vážení Země, což je nepřesné, ale vystihuje to jeden z největších přínosů. Jak bylo řečeno v abstraktu, změříme-li G můžeme určit nejen hmotnost Země, ale i jakéhokoli jiného tělesa, známe-li gravitační zrychlení a vzdálenost v daném bodě. Pro tento výpočet upravíme výše uvedený vztah do podoby

$$M = g\frac{r^2}{G}, \tag{2}$$

kde M je hledaná hmotnost a g je gravitační zrychlení v daném místě. (Jako g se standardně označuje tíhové zrychlení, do kterého je ale započteno odstředivé zrychlení na dané rovnoběžce. My ale potřebujeme pouze zrychlení dané gravitací planety, nikoli její rotací.)

Základní motivací pro nás bylo zkusit s jakou přesností se nám povede gravitační konstantu změřit.

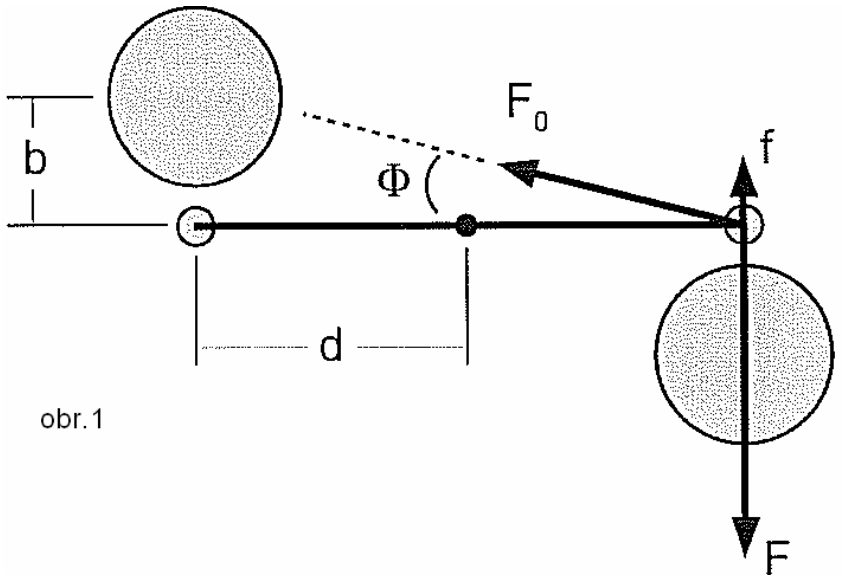
2. Experiment

a)Teorie: Měření na torsních vahách je založeno na vlastnostech lanka či pásku a nosné tyčky s tělesy. Lanko nám zde hraje roli pružiny, kterou v tomto experimentu nelze pro nedostatečnou přesnost při měření velmi malých sil použít.

Velké koule o hmotnostech m_1 působí na malé koule o hmotnostech m_2 stejně velkými silami opačného směru F podle gravitačního zákona, (samozřejmě působí i malé koule na velké silou F, ale zrychlení způsobené těmito silami je tak malé, že je neuvažujeme). Vzniká moment síly $\tau_k = 2Fd$ (d, F viz obrázek). Jako reakce na tento moment vzniká v lanku moment síly $\tau_l = -\kappa\theta$, kde θ je úhel stočení a κ je torsní neboli kroutící moment lanka. Tyto dva momenty se musí rovnat (zákon akce a reakce).

$$\tau_k = -\tau_l \tag{3}$$

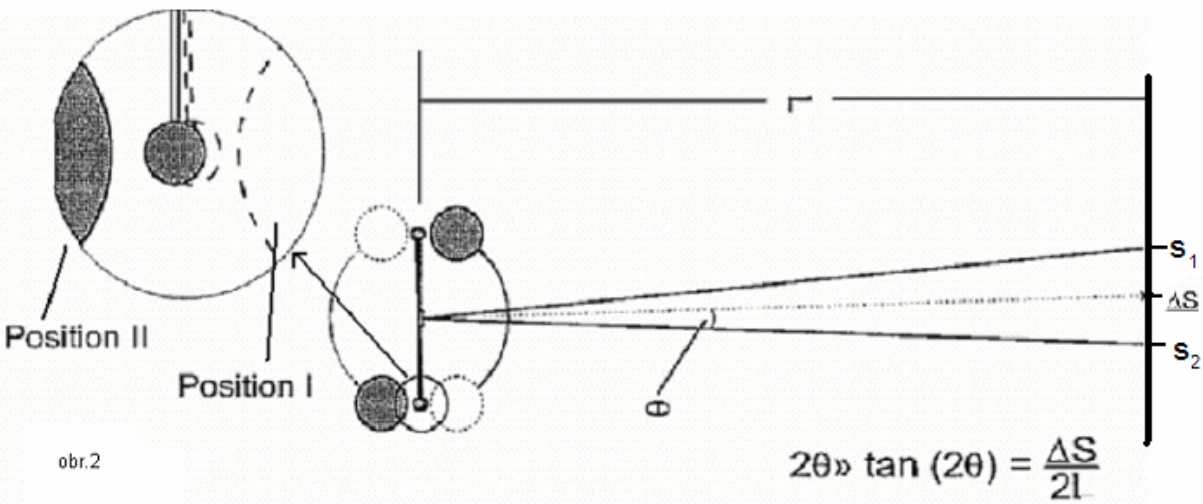
$$\kappa\theta = 2dG\frac{m_1 m_2}{b^2} \tag{4}$$



obr.1

Úhel θ si vyjádříme pomocí goniometrických funkcí a experimentálně naměřených hodnot $S_{1,2}$ (viz obr.2). Aproximace goniometrické funkce na její argument je možná u malých úhlů (cca do 5°).

$$\theta = \frac{\Delta S}{4L} \tag{5}$$



Torsní moment κ je s periodou kmitů torsních vah T, kterou získáme fitováním naměřených hodnot, ve vztahu

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J}{\kappa}, \tag{6}$$

kde J je moment setrvačnosti soustavy malých koulí (m_2) vůči ose kolmé na tyčku a procházející jejím středem, přičemž tyčku pro její malou hmotnost zanedbáme. Moment J je za použití Steinerovy věty [2]

$$J = 2m_2(d^2 + \tfrac{2}{5}r^2)\,. \tag{7}$$

Z toho je

$$\kappa = 8\pi^2 m_2 \frac{d^2 + \frac{2}{5}r^2}{T^2} \tag{8}$$

Nyní upravíme vztah (4), dosadíme do něj vztahy pro θ, κ a získáme vztah pro výpočet gravitační konstanty

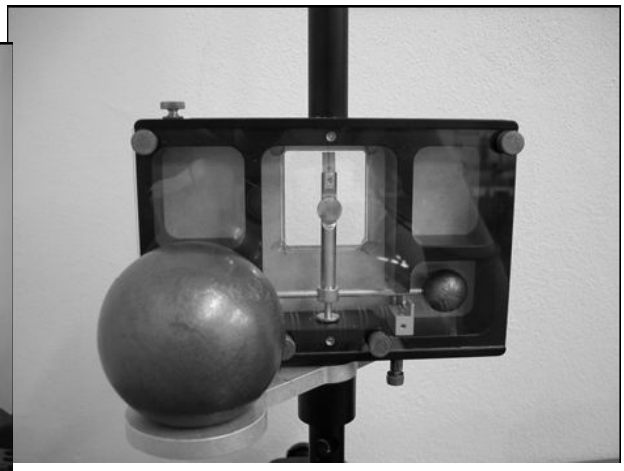
$$G = \pi^2 \Delta S b^2 \frac{d^2 + \frac{2}{5}r^2}{T^2 m_1 L d} \tag{9}$$

Je nutné provést korekci. Malá koule m_2 je ovlivněna i vzdálenější větší koulí (obr.1,[3]-s.12).

$$G_0 = \frac{G}{1-b} \tag{10}$$

Do tohoto vztahu dosadíme naměřené a zpracované údaje.

b)Měření: Měření jsme prováděli metodou popsanou v manuále [3] metodou II. Laserový



Výsledky: Laserový paprsek odrážející se od zrcátka na ose torsních vah dopadal na stupnici ve vzdálenosti L. Z této stupnice jsme odečítali hodnoty zobrazené v grafu černými tečkami. Je vidět, že změnou polohy velkých koulí jsme získali dvě různé sinusoidy. Navifováním v programu Orange jsme získali parametry těchto sinusoid a červenou stopu v grafu, která je zobrazením těchto funkcí s nejmenší možnou odchylkou od naměřených hodnot.

Tyto funkce zapíšeme

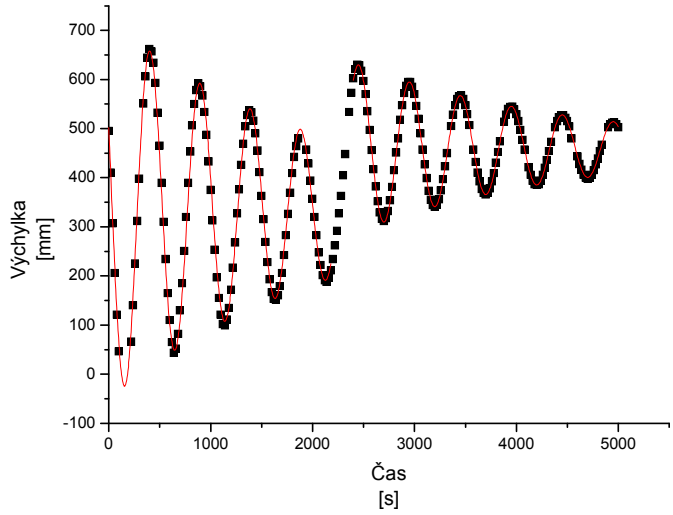
$$f = Ae^{-\frac{x}{\tau}} \sin(\tfrac{2\pi}{T}(x - x_c)) + A_0 \tag{11}$$

	1. funkce	2. funkce
A	396 ±6	-524±5
A_0	**336±1**	**460,7±0,1**
T	***492,5±0,5***	***500,1±0,1***
τ	2090±70	2166±12
x_c	281	2577,1±0,2

Pro výpočet použijeme zvýrazněné hodnoty. T jsou periody z kterých uděláme průměr, A0 jsou hodnoty S1,2 (obr.2). Údaje uváděné v tabulce jsou výsledky dílcích měření – rozměry pomůcek a vzdáleností (obr.).

r	9,55	0,00955
d	50,00	0,05
b	46,50	0,0465
L	6077,00	6,077
dS	124,00	0,124
T	496,00	
m1	1,49	

G	G0	chyba %
6,01E-011	6,30E-011	
	6,67E-11	5,5



3. Shrnutí

Tento typ měření gravitační konstanty prováděn s chybou průměrně 5% [3], což jsme s naměřenou hodnotou 6,3 E-11 a tedy odchylkou 5,5% přibližně dodrželi. Myslím, že vzhledem k zaokrouhlování, které jsme prováděli, je výsledek opravdu dobrý. Asi nejdůležitější je dostatečně velký statistický vzorek měření, aby výsledek měření zpracovaný počítačem byl zatížen co nejmenší statistickou chybou.

4. Poděkování

Za konzultace našemu supervisorovi Davidu Koňaříkovi a za skvělé zázemí FJFI ČVUT.

5. Reference:

[1] FEYNMAN, R. P. – LEIGHTON, R. B. – SANDS, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady* Fragment 2000 č. strany - 102

[2] http://www.vysokeskoly.cz/maturitniotazky/otazky/fyzika/TuheTeleso.htm

[3] Gravitional torsion balance PASCO scientific 1998 http://rumcajs.fjfi.cvut.cz/fyzport/FundKonst/Cavendish/CavendishEn.pdf

[4] Macháček, J.- Mouchová, Z- Nowakova, J. *Cavendishův pokus: Měření grav. konst.* FYZTYD 2006 č. str. 2
http://fyztyd.fjfi.cvut.cz/2006/web/post/prispevky/sbpdf/cavendish.pdf