Úvod do chaotické dynamiky

M. Pavelka, gym. Strakonice, michal.pavelka@email.cz
J. Lochman, gym. Nový Bydžov, hansoae@gmail.com
V. Slinták, SPŠ Uh. Hradiště, vasco.vls@gmail.com

19. června 2007

Abstrakt

Aby mohl být dynamický systém označen za chaotický, je nutné aby splňoval určité podmínky. Jednou z nich je velká citlivost na počáteční podmínky. Příklady takových systému mohou být dvojité kyvadlo, billiard, populační vývoj biologických systémů, apod.

Tyto systémy se zobrazují za pomoci Poincareho map a bifurkačních diagramů, které nám poskytují dobrou představu o chování těchto systémů.

1 Úvod

Ještě na počátku 18. století si lidé mysleli, že za pomoci klasické Euklidovské geometrie a Newtonových zákonů jsou schopni popsat chování jakéhokoliv dynamického systému a na základě počátečních podmínek přesně predikovat budoucí stav tohoto systému. Teprve na konci 18. a začátku 19. století začali přední matematici tuto prolematiku zkoumat. Zjistilo se, že některé systémy jsou extrémě závislé na počátečních podmínkách – v tomto smyslu se pak mluví o *efektu motýlích křídel* [1].

Teorie chaosu [2] popisuje chování systémů, které jsou velmi citlivé na své počáteční podmínky. Malá změna techto podmínek vyvolá velké změny v budoucím chování systému. Tyto změny mohou být tak malé, že je nejsme schopni rozlišit žádnou známou metodou. Tento systém pak označujeme jako *chaotický*.

2 Základní pojmy

2.1 Fázový prostor

Jako fázový prostor se ve fyzice nazývá prostor proměnných q^i (tedy zobecněných souřadnic) a p^i (tedy zobecněných hybností). Je-li dimenze konfiguračního prostoru n, pak dimenze fázového prostoru je $2n$.

Body fázového prostoru se používají k reprezentaci stavů soustavy hmotných bodů v každém časovém okamžiku. Tyto body se pak označují jako fázové body. Změna stavu, tedy vývoj soustavy, je pak představována pohybem reprezentativního bodu ve fázovém prostoru. Křivka, po které se reprezentativní bod ve fázovém prostoru pohybuje, se označuje jako fázová trajektorie.

2.2 Poincarého mapy

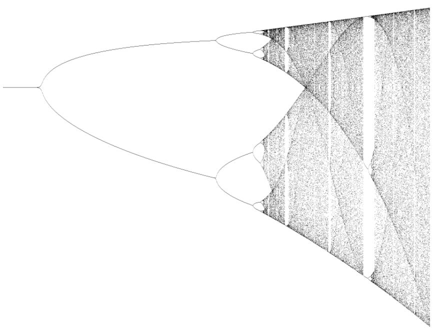
Abychom byli schopni představit si fázový prostor, který je často 4 a více dimenzionální, je nutné najít nějaký způsob jak jej převést do dvou-dimenzionální roviny. 2D prostor si již můžeme představit jednodušeji, a proto se k zobrazení tohoto prostoru používají *Poincarého mapy.*

Pokud problém zjednodušíme, můžeme si tyto mapy představit jako řez fázovým prostorem, přičemž jedna či více proměných systému je konstantní.

2.3 Atraktor

Při popisu dynamických systémů se často setkáváme s pojmem *atraktor* (anglicky *attractor*). Atraktor dynamického systému je množina stavů, do kterých systém konverguje, tzn. jedná se o množinu hodnot, ve kterých se systém ocitne po určité době.

2.4 Bifurkace



Obrázek 1: Bifurkační diagram

Jestliže u sledovaného systému dochází k velkým změnám vnitřního stavu při nepatrných změnách vstupních parametrů, značíme tento jev *bifurkace* (*rozdvojení, rozvětvení*). U většiny systémů k tomuto jevu za normálních okolností nedochází. Existují však i systémy, které dosáhnou bifurkace při dosažení určitých kritických hodnot. Jedná se například o turbulentní chování kapaliny při dosažení určité rychlosti proudění.

Ačkoliv bifurkace souvisí s chaosem, nejedná se o zaměnitelné termíny. Chaotický stav systému totiž nastává až v případě množství na sebe navazujících bifurkací.

Tento jev studujeme pomocí *bifurkačních diagramů*, kde na osu x vynášíme vstupní parametry a na osu y pak všechny vnitřní stavy, kterých může systém nabývat.

3 Příklady chaotických systémů

3.1 Populační vývoj biologických systémů

Jestliže studujeme populační vývoj druhu v uzavřeném systému (např. králíčci na ostrově) zjistíme, že ne vždy můžeme přesně předpovědět budoucí vývoj populace. Tento systém se za jitých okolností totiž chová chaoticky. Tento dynamický systém (dynamický znamená, že se mění v čase) je nelineární a často se můžeme setkat s označením *Verhulstův proces.* Rovnice, pomocí které můžeme tento systém vyšetřovat je:

$$x_{n+1} = G_r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

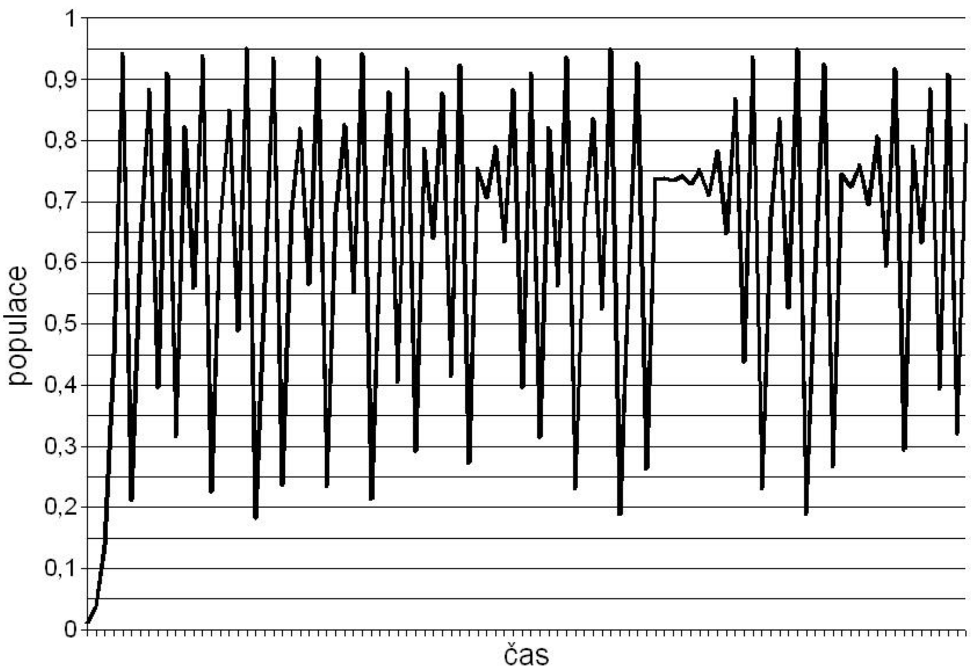
kde:

x_n je počet jedinců v dané n-té generaci a

G_r je koeficient proměnlivosti (rychlost množení).

Jestliže budeme studovat, při jakých hodnotách G_r je nárůst populace stabilní a kdy konverguje k chaosu, přijdeme na následující hodnoty:

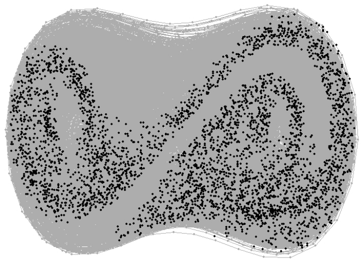
G_r	Hodnota
od 0 do 1	Populace organismů vymře
od 1 do 3	Přírůstek populace je stabilní
od 3 do 3,5	Systém začíná bifurkovat do více řešení
od 3,56 do 4	Přírůstek je chaotický, nelze předpovědět budoucí stav
od 4	Populace organismů vymře



Obrázek 2: Bifurkační diagram populačního vývoje. $G_r = 3.9$

3.2 Chaotické kyvadlo

Pomocí různých uspořádání kyvadel (pružin atd.) lze v praxi poměrně snadno ukázat chaotické chování. My jsme použili soustavu dvou pružin vedených přes kladku, která slouží jako kyvadlo. Do systému je dodávána energie pomocí motorku s excentrem (převádí rotační pohyb na lineární). Systém je zároveň tlumen jednak třením, jednak magnetem (vyvolává v masivním setrvačníku vířivé proudy, které slouží jako brzda) Vhodnou kombinací napětí pružin, umístění závaží na setrvačníku, nastavení pohonu a brždění lze systém navést do chaotického stavu – setrvačník rotuje chaoticky, zastavuje v různých bodech a jeho další chování je nepředvídatelné.

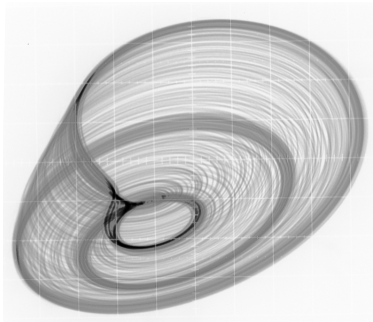


Obrázek 3: Fázový prostor a Poincarého mapa kyvadla

Problémem je citlivost na vstupní podmínky a stabilita nastavení, systém ochotně přechází do stabilního stavu s vlastnostmi klasického kyvadla.

3.3 Elektronický generátor chaosu

Jedná se o elektronický RLC obvod, který se chová jako oscilátor. V obvodu je zařazen nelineární člen, plnící funkci zpětné vazby. Pomocí proměnného rezistoru můžeme měnit parametry obvodu a přecházet od stabilního stavu k chaosu.



Obrázek 4: Graf fázového prostoru elektronického oscilátoru ve stavu chaosu

4 Shrnutí

I přesto, že věda zabívající se chaosem se stále vyvíjí, jsou výše uvedené informace jen velmi stručným nahlédnutím do tohoto vědního oboru. S chaosem se každý z nás setkává denně, aniž by si to uvědomoval. S rozvojem lidského poznání je důležité se tímto oborem dále zabývat, protože je nedílnou součástí mnoha vědních disciplín (např. astrofyzika, turbulence kapalin, studium chování plazmatu, atd...).

My jsme se zabývali matematickým modelováním chaotických systémů, v praxi jsme vyzkoušeli elektronický generátor chaosu a chaotické kyvadlo – výsledky měření jsme graficky znázornili pomocí fázového prostoru a Poincareho map.

Poděkování

Děkuje našemu supervisorovi, Ing. Ondřeji Svobodovi, který nás provedl taji chaotických systémů. Dále FJFI ČVUT, která poskytla prostory a technické zázemí. V neposlední řadě Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. za organizaci fyzikálního týdne.

Reference

[1] Wikipedia.org – *Butterfly effect*
`http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect`

[2] Wikipedia.org – *Chaos theory*
`http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory`

[3] Jiří Macur – *Dynamické systémy*
`http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys/Default.htm`