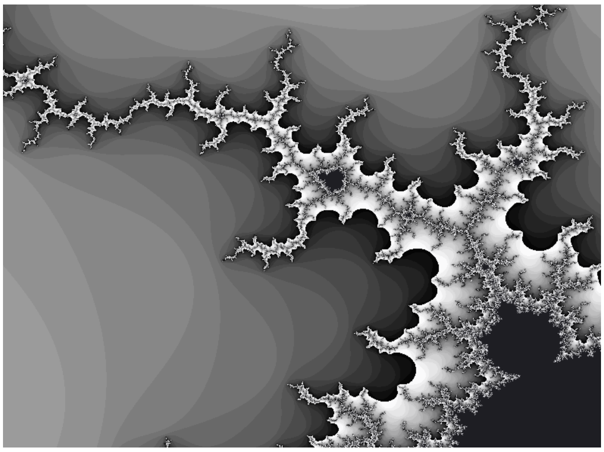
Počítačové zobrazení fraktálních množin

J. Dohnal* Z. Másler** H. Švihlová***
Střední škola stavební Jihlava*
Střední odborná škola a SOU Hořovice**
Gymnázium P. Bezruče***
jakudohn@centrum.cz*
zmasler@gmail.com**
helena.svihlova@seznam.cz***

Abstrakt:
Práce se věnuje fraktálním množinám a to jak jejich definici a výpočtu fraktální dimenze, tak jejich zobrazení na počítači.

1 Úvod



Fraktál se dá nejjednodušeji definovat jako nekonečně členitý útvar, jehož základní vlastností je soběpodobnost, tzn. že objekt vypadá stejně, ať se na něj díváme v jakémkoliv zvětšení.

Fraktální geometrie slouží k chápání složitostí některých struktur a k pochopení některých jevů v přírodě jako je např. délka meandru řeky, která je závislá na měřítku, které používáme, s přesnějším měřítkem se jeho délka zvyšuje.

Přesná definice fraktální množiny dosud neexistuje, jako první ji definoval matematik B.B.Mandelbrot a to jako „množinu či geometrický útvar, jehož Hausdorffova dimenze je ostře větší než jeho dimenze topologická."
Abychom pochopili Mandelbrotovu definici, je třeba tyto pojmy definovat.

2 Fraktální geometrie

Topologická dimenze

- je celočíselná, používá se pro geometricky hladké objekty, tedy objekty popsatelné Eukleidovskou geometrií. Zjednodušeně jde o určení počtu parametrů nutných k určení objektu.

Fraktální dimenze

- pomocí ní se určuje složitost některých struktur. Nekonečně složitá struktura, tedy např. členité pobřeží, má větší dimenzi než geometricky hladký objekt, např. křivka, ale ještě se nejedná o rovinu, takže má dimenzi vyšší než 1, ale menší než 2.

Výpočet fraktální nebo také Hausdorffovy dimenze

Zjednodušeně můžeme použít výpočet pomocí logaritmů. Vezmeme-li jakýkoliv objekt, např. úsečku, tak ji můžeme rozdělit na N částí. Tím získáme zmenšení $1/N$. Platí, že vynásobením částí objektu a jeho zmenšení umocněném dimenzí objektu dostáváme jedna.

$$N\frac{1}{N^D}=1,$$

kde N je počet částí objektu a D je jeho dimenze.

U fraktálů ale neplatí, že zmenšení je rovno $\frac{1}{N}$, takže počítáme se zmenšením s. Pak platí

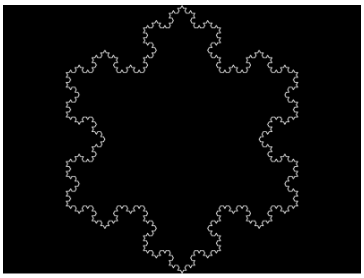
$$N.s^D = 1,$$

kde s je zmenšení objektu, N je počet jeho částí a D jeho dimenzí. Získáváme tedy exponenciální rovnici, ze které vyjádříme D jako

$$D = \frac{-\log N}{\log s}$$

Tento výpočet můžeme demonstrovat na známém fraktálním objektu Kochova křivka.

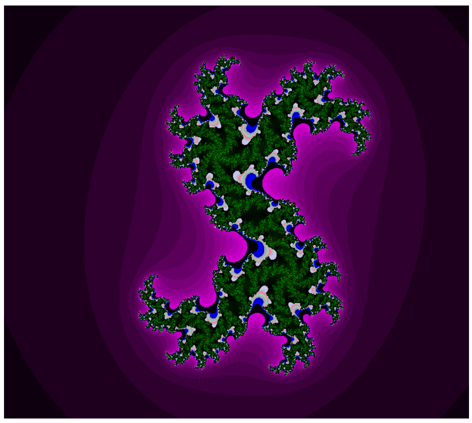
Kochova křivka



Při vytváření Kochovy křivky máme úsečku rozdělenou na třetiny, kdy prostřední třetinu nahradíme rovnostranným trojúhelníkem. Postup neustále opakujeme.
Získáváme tedy zmenšení 1/3 při čtyřech částech.

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$, což je přibližně 1,26186

Další příklady fraktálních množin



Juliovy množiny

Juliovy množiny jsou pojmenovány po francouzském matematikovi Gastonu Juliovi, který se zabýval chováním funkce komplexní paraboly $y = \mathrm{f}(x) = x^2 + c$ a to zejména o iterační proces, tedy y v jednom kroku je použito jako x pro krok následující. Dostáváme tedy

$$z_n = z_{n-1}^2 + c,$$

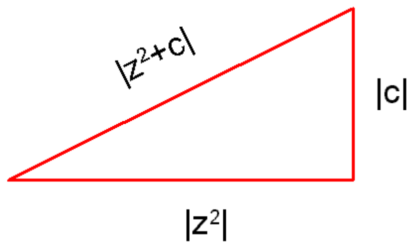
kdy z_n i c jsou komplexní čísla, z_0 určuje pozici bodu v komplexní rovině a c je libovolná konstanta.

Juliovy množiny jsou definovány jako množiny všech komplexních čísel z_0, pro které tato posloupnost nediverguje, tj. neblíží se nekonečnu.

Prahový poloměr divergence

Při počítačovém zobrazování Juliových množin máme k dispozici pouze konečný počet iterací. Při zjišťování, zda posloupnost $z_n = z_{n-1}^2 + c$ diverguje, tedy zda dané z_0 patří do dané množiny, využíváme toho, že pokud platí $|c| \leq |z|$ a zároveň $|z| > 2$, pak posloupnost diverguje.

Důkaz vychází z trojúhelníkové nerovnosti:



$|z^2| \leq |z^2+c| + |c|$

$|z^2+c-c| \leq |z^2+c| + |c|$ tzn. $|z^2| - |c| \leq |z^2+c|$

Jestliže tedy $|z| > |c|$ znamená to, že i

$|z^2| - |z| \leq |z^2+c|$

Na levé straně vytkneme $|z|$ a dostáváme

$|z^2+c| \geq |z|(|z|-1)$, tedy $|z_{n+1}| > |z_n|(|z_n|-1)$

Pokud zároveň $|z| > 2$, tak $|z|-1 > 1$ a můžeme tedy $(|z_n|-1)$ nahradit $(1+\varepsilon)$, pak dostáváme

$$z_{n+1} \geq |z_n|(1+\varepsilon) > |z_n|$$

a pro každé následující

$$z_{n+2} \geq |z_{n+1}|(1+\varepsilon)^2 > z_{n+1}$$

Půjde-li tedy dále z_{n+1} do nekonečna, bude se $(1+\varepsilon)$ nekonečně mocnit, tzn. můžeme určit, že posloupnost diverguje, když $|z|$ přesáhne hodnotu 2.

Mandelbrotova množina

Je také vytvořena díky iteraci funkce komplexní paraboly $z_n = z_{n-1}^2 + c$, kde z_n i c jsou komplexní čísla a c již není ve výpočtu konstantou, ale závisí na bodu, pro který počítáme posloupnost.

Program zobrazující Mandelbrotovu a Juliovu fraktální množinu

Vytvořili jsme si program, který vycházel ze zdrojového kódu vytvořeném Ing. Petrem Paušem. Tento zdrojový kód je šířen pod GNU licencí. Je psán v jazyce C++, využívající SDL knihoven. Původní program zobrazoval Mandelbrotovu množinu. Po naší úpravě zobrazuje jak Mandelbrototvu tak i Juliovy množiny.

Při spuštění programu se v konzoli dostanete do hlavní nabídky, ve které si můžete zvolit nastavení barev nebo zobrazení množin (fraktálů). Menu výběr barev; zde si můžete vybrat odstíny šedivé, zelené, modré a červené. Po zvolení barev, jste přesunuti opět do hlavní nabídky. Při zadání jedné z množin si můžete vybrat jednu z devíti možností. Možnosti jsou od původní množiny až po různě pozměněné; například pomocí funkce sinus nebo cosinus.

Dále jsme původní program vylepšili o ovládání pomocí klávesnice. Kurzorovými klávesami se posouváte po množině vykreslené v okně 800 na 600 pixelů. Dále pomocí numerického plus a minus lze přibližovat nebo oddalovat obraz téměř do nekonečna, to je omezeno počtem iterací.

```
//MANDELBROTOVA MNOZINA
int mandelbrot(double cx, double cy,int maxiter)
{
      double zx=0,zy=0,zx2,zy2;
      int iter=0ů
      do {
          zx2=zx*zx;
          zy2=zy*zy;
          zy=2.0*zx*zy+cy;
          if (a == 0) zx=zx2-zy2+cx;
          if (a == 2) zx=cos(zx2-zy2+cx);
          if (a == 3) zx=log(zx2-zy2+cx);
          if (a == 4) zx=sqrt(zx2-zy2+cx);
          iter++;
         } while (iter<maxiter && (zx2+zy2)<4.0);
      return iter;
}
```

část zdrojového kódu zobrazující část, která počítá mandelbrotovu množinu

Algoritmus

Hlavní část algoritmu je v cyklu `do-while`. Programovací jazyk nepodporuje výpočty s komplexními čísly, proto je nutné výpočet rozepsat.

$$z_{n+1} = (z_n - i)^2 + c$$

$$z_x + z_y \cdot i = (z_x + z_y \cdot i)^2 + c_x + c_y \cdot i$$

$$z_x + z_y \cdot i = z_x^2 + 2 z_x z_y \cdot i - z_y^2 + c_x + c_y \cdot i$$

Z toho vyplývá:

$$z_x = z_x^2 - z_y^2 + c_x$$

$$z_y = 2 z_x z_y + c_y$$

3 Shrnutí

Fraktální geometrie je samostatná vědní disciplína, která je intenzivně rozvíjena zhruba od 60.let 20.století. Za jejího objevitele je považován polský vědec Benoit B. Mandelbrot.

Pravděpodobně největší uplatnění má dnes fraktální geometrie a fraktály v počítačové grafice. Fraktály lze v počítačové grafice využít například ke generování přírodních útvarů jako jsou stromy, rostliny, hory, mraky, kameny atd. V této oblasti neexistuje lepší způsob, který by dával věrohodnější výsledky.

V práci jsme se zaměřili na výpočet prahového poloměru divergence a fraktální dimenze. Tento výpočet je sice hodně zjednodušen, ale čas i formální stránka práce už nám neumožnily se rozepsat. Dále jsme se naučili základy fraktálních množin a vytvořili jsme program na jejich zobrazování, na kterém bychom chtěli i dále pracovat.

Poděkování

Chceme velice poděkovat organizátorům a sponzorům Fyzikálního týdne, Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze a nejvíce našemu supervizorovi Petru Paušovi. Chceme také poděkovat našim školám, které nás připravily na tento týden.

Reference

[1] P.Pauš, *Počítačové metody analýzy fraktálních množin,* FJFI ČVUT 2005/2006, http://kmlinux/~pausp1/html/skola/Fraktaly/Diplomova_prace.pdf

[2] P.Pauš, *Počítačové generování fraktálních množin,* FJFI ČVUT 2003/2004 http://kmlinux/~pausp1/html/skola/resersni_prace/reserse.pdf

[3] P. Tišnovský http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice/

[4] P.Tišnovský http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/node20.html

[5] P.Tišnovský http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/node24.html

[6] P.Tišnovský http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/node25.html

[7] P.Tišnovský http://www.vood.mysteria.cz/fraktaly/clanky/1.htm#tth_sEc1.2