Taylorov polynom jako základny nastroj numerického modelování fyzikálních dějů

Michal Maixner*, Štěpán Pilař**
Gymnázium Varšavská, Žilina*; Gymnázium Nad Kavalírkou, Praha 5**
Umaxo1@azet.sk*; mingan.stepi@gmail.com**

Abstrakt:

Jistě jste se setkali s problémy ve fyzice, kdy jste našli řešení fyzikálního problému v podobě složité diferenciální rovnice a neuměli jste ji analyticky vyřešit. Právě na to byly vyvinuty různé numerické metody jako Eulerova, či Rubte-Kuttova. Jsou založené na počítání nové polohy tělesa (nebo jiné potřebné veličiny) z předcházejících kroků. Je pochopitelné, že přesnost metody velmi závisí na délce kroku. Protože člověk má velmi omezenou schopnost dělat rychlé výpočty, používá se na tyto metody výpočetní technika. Ale ani ona nemá nekonečnou rychlost výpočtů, a proto potřebujeme najít metodu, která je co nejpřesnější, zároveň musí mít co nejmenší časovou a paměťovou náročnost. V této publikaci se budeme zaobírat právě dvěma metodami – Eulerovou a Runge-Kuttovou – a to na relativně jednoduchých příkladech, které sice dokážeme vyřešit analyticky, ale jsou velmi vhodné na názornou ukázku metod.

1 Úvod

Numerické modelování fyzikálních dějů je velmi důležitý nástroj pro fyziky. Hlavně v moderní fyzice se stává, že některé problémy jsou analyticky neřešitelné. Samozřejmě pro samotného člověka jsou tyto problémy neřešitelné i pomocí numerických metod. Jenže člověk si pomohl vytvořením počítačové techniky, která složité výpočty zvládne ve velmi krátkém čase. A tak tato metoda v dnešní době, kde o techniku není nouze, slaví úspěch. Proč ovšem mluvíme o metodách v množném čísle? Protože jich existuje mnoho a jsou rozdíly jak v jejich implementaci, tak v přesnosti výsledků. V této práci se podíváme na dvě nejjednodušší metody – Eulerovu a Runge-Kuttovu.

2 Numerické modelování fyzikálních dějů

Stručná charakteristika

Při řešení fyzikálních úloh často narazíme na analyticky neřešitelnou rovnici. Proto musíme použít numerické metody. Ty jsou založeny na posloupnosti kroků. Zvolíme si malý interval a na něm předpokládáme, že platí podmínky z posledního kroku. Teda jak se síla mění s časem, tak si zvolíme malý časový interval, na kterém předpokládáme, že je tam síla konstantní. Z toho je jasné, že čím je tento interval menší, tím je výsledek přesnější.

Eulerova metoda

Je to nejjednodušší metoda a zároveň nejméně přesná. Vychází přímo z definice fyzikálních veličin. Vyřešme tedy příklad:

Jaká je časová závislost výšky tělesa při svislém vrhu? Na těleso působí stálá síla F=-mg a z druhého Newtonova zákona dostáváme $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$. Předpokládejme, že toto neumíme analyticky vyjádřit. Rovnici si můžeme přepsat na dvě rovnice:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -g$$

A teď použijeme Eulerovu metodu:

Z definice derivace dostáváme $v_x(t_n, x_n) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}\right]$. Tedy pokud bychom chtěli přesně zjistit rychlost v závislosti na čase a dráhy, museli bychom použít nekonečně malý časový interval. To by však mělo za následek nekonečný počet výpočtů. Je jasné, že tohoto nemůžeme prakticky dosáhnout, ale musíme si zvolit *h* rozumně velké. Tedy pokud nepředpokládáme, že *h* se blíží nule, dostáváme:

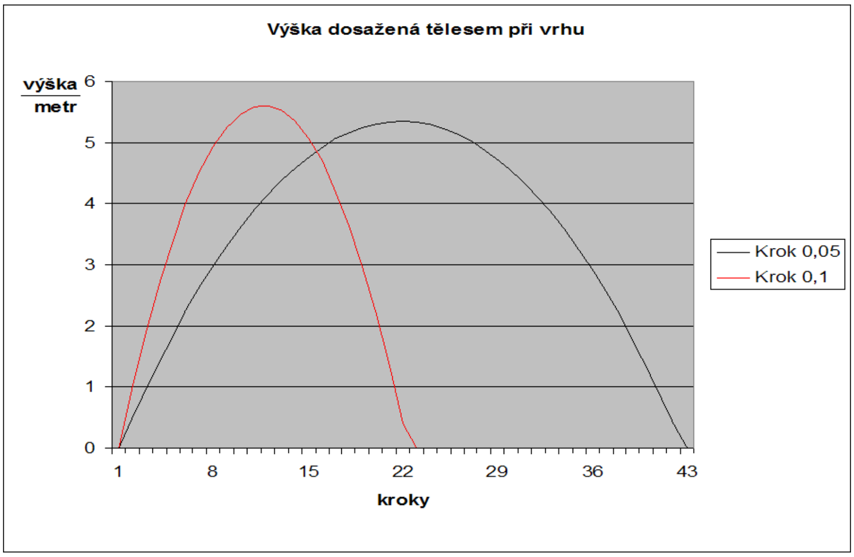
$$v_x(t_n, x_n) = \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}$$
$$hv_x(t_n, x_n) + x(t_n) = x(t_n + h)$$

(Protože t_n+h=t_{n+1}, můžeme takto dostat všeobecný Eulerovy metody $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.)

A stejně pro druhou rovnici:

$$-g = \frac{v_x(t_n + h) - v_x(t_n)}{h}$$
$$-gh + v_x(t_n) = v_x(t_n + h)$$

Tyto rovnice zadáme do počítače, zadáme počáteční podmínky pro t_n=t_0 a problém je vyřešený.



Taylorův rozvoj

Taylorův rozvoj je velmi důležitá rovnice, na které jsou založené obě numerické metody, které budeme nebo jsme popisovali. Z předcházejícího jsem odvodili Euelrovu metodu pomocí zanedbání toho, že *h* se musí pro přesný výpočet nevyhnutelně blížit nule. Tailorův rozvoj je způsob přepisu funkce, pokud poznáme předchozí krok a interval mezi kroky. Jeho tvar je následovný:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k$$

$$x = x_0 + h$$

Z tohoto vidíme, že první dva členy z rozvoje jsou Eulerova metoda. Kdybychom použili celý rozvoj, dostaneme přesnou hodnotu f(x). Jenže tento rozvoj je nekonečný, takže bychom potřebovali nekonečný počet výpočtů. Opět však funguje princip, že čím víc členů z rozvoje vybere, tím přesnější bude výsledek. Na to je založena i další metoda, nazvaná Rubte-Kuttova, která pracuje s prvními čtyřmi členy Tailorova rozvoje (samozřejmě můžu pracovat i s více členy, ale čtyři jsou nejpoužívanější).

Runge-Kuttova metoda

Tato metoda je přesnější, než Eulerova, ale její nevýhodou je značná složitost, poměrně velký počet výpočtů. Její odvození už není tak jednoduché jako u Eulerovy metody, takže se spokojíme s tím, že metoda byla dokázána a odvozená a nemusíme to dělat i my. Její tvar je následovný pro první čtyři členy Tailorova rozvoje.

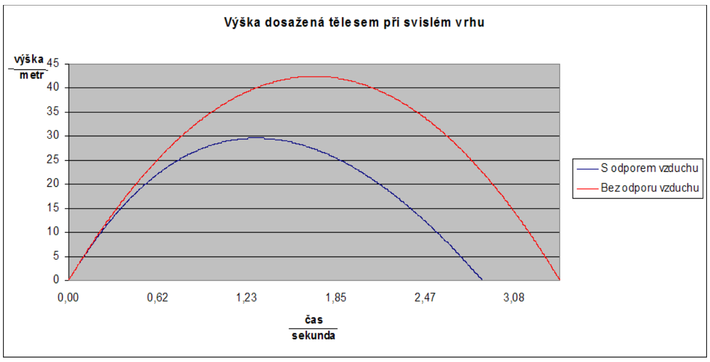
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

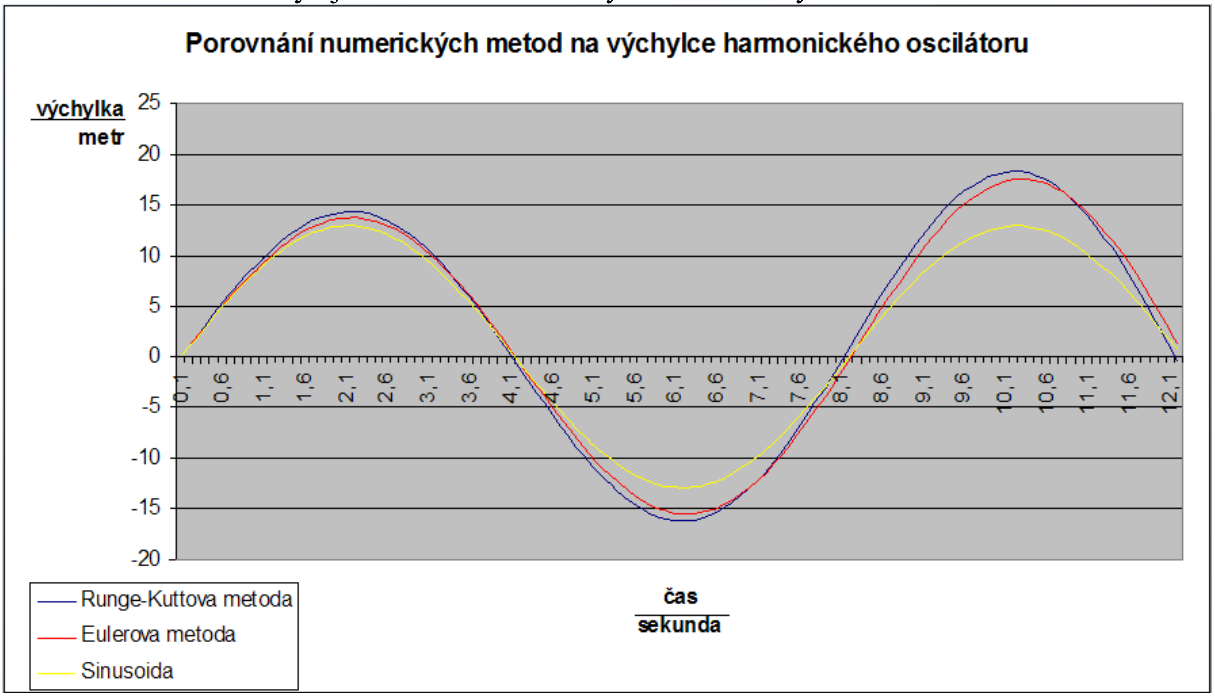
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$



Porovnání Eulerovy a Rubte-Kuttovy metody na harmonickém oscilátoru

Vyřešením rovnic pro harmonický oscilátor (nebudeme rozebírat postup, jak jsem dostali graf) $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ dostaneme graf. Na jeho vykreslení jsme použili podobný postup jako při výše uvedených úlohách, ale použili jsme jednak Eulerovu metodu, jednak Runge-Kuttovu metodu. Výsledky jsme porovnali se sinusoidou, která je (jak je všeobecně známo) analytickým řešením pro harmonický oscilátor.

Můžeme vidět, že Runge-Kuttova metoda je přesnější než Eulerova, v tomto případě ne o tolik – Runge-Kuttova je přesnější ve shodě na x-ové ose, Eulerova se více blíží amplitudě sinusoidy. Kdybychom modelovali delší časový úsek, zjistili bychom, že obě dvě metody se stále více odchylují od sinusoidy a tedy i reálného kmitání.



3 Shrnutí

Naše výpočty ukázaly odlišnosti mezi Ruletovou a Runge-Kuttovou metodou. Současně jsme zkoumali vlivy jednotlivých parametrů (především délku kroku) na výsledek. Můžeme říct, že pokud je zapotřebí numerická modelace nějakého děje, tak existuje škála metod, které poskytují různě přesné výsledky. Při rozhodování, kterou metodu využijeme musíme brát v potaz délku trvání zkoumaného jevu, účel modelu a tedy jeho přesnost a samozřejmě výpočetní potenciál, který máme k dispozici.

Runge-Kuttova metoda není nejpřesnější samozřejmě. Jsou další metody založené na podobných principech, s více kroky či kombinací těchto prvků. Za nejpřesnější můžeme označit metodu predikátor-korektor, která je logicky také nejnáročnější pro modelaci.

Poděkování

Velice děkujeme našemu supervizorovi Ing. Hynku Lavičkovi za jeho konzultace a navedení správným směrem.

Reference:

[1] Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic
URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Numerické_řešení_obyčejných_diferenciálních_rovnic [cit. 2007-06-19]

[2] Eulerova metoda URL: http://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerova_metoda [cit. 2007-06-19]

[3] Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic – počáteční úloha URL: http://vydavatelstvi.vscht.cz/knihy/uid_isbn-80-7080-558-7/pages-img/058.html [cit. 2007-06-19]