Metoda Monte Carlo

R. Jakubíková*, J. Novák**, J. Korbel***
* Gymnázium Jeseník
** Gymnázium Voděradská, Praha 10
*** Gymnázium Jihlava
honza.novak11@seznam.cz

Abstrakt:
Metoda Monte Carlo je prostředek pro výpočet obsahů rovinných obrazců, pro které ostatní metody selhávají. Při výpočtu se využívá náhodných čísel, proto se metoda jmenuje podle slavného kasina v Monte Carlu. Metoda Monte Carlo nám například umožňuje vypočítat číslo π, plochu pod křivkou, ke které neumíme vypočítat její integrál, a dokonce plochu pod křivkou, ke které neznáme její explicitní vyjádření. K metodě jsou potřeba náhodná čísla, která můžeme získat hodem mincí, kostkou nebo lépe generátorem pseudonáhodných čísel. Pro tuto metodu je tedy ideální využít počítač, který nám za krátký čas poskytne dostatek čísel, což zajišťuje dostatečnou přesnost výpočtu.

1 Úvod

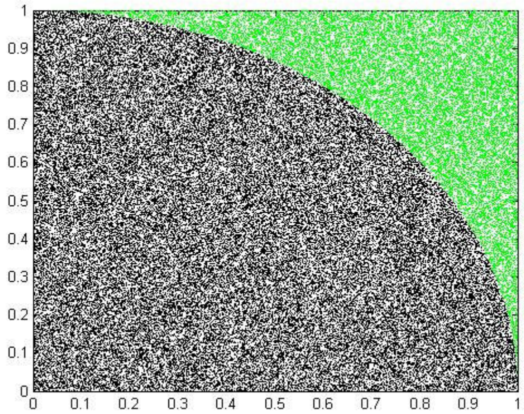
Metoda Monte Carlo (dále jen MC) je způsob, jak vypočítat obsah rovinného obrazce s pomocí pravděpodobnosti. Využívá se při ní náhodných čísel, proto se metoda jmenuje podle kasina v Monte Carlu. Její hlavní výhoda spočívá v tom, že si poradí i s obrazci, na které jiné metody nestačí.

2 Technika výpočtu

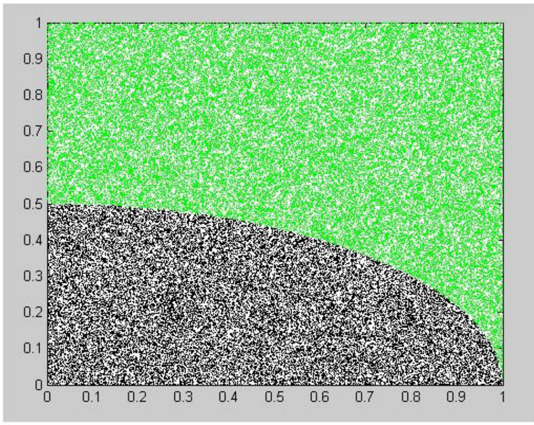
Metoda spočívá v tom, že si ohraničíme oblast, ve které chceme vypočítat obsah daného obrazce. Většinou je oblast ohraničená čtvercem nebo obdélníkem. Dále generujeme body, které leží v ohraničené oblasti, a zjišťujeme, zda body v obrazci leží, či nikoliv. Obsah obrazce je tedy roven $\frac{N_0}{N} \cdot S_{ob}$, kde N je počet všech náhodných bodů a N_0 je počet všech bodů ležících uvnitř obrazce a S_{ob} je velikost oblasti.

3 Výpočet čísla π pomocí metody MC

Pro výpočet čísla π použijeme čtvrtkružnici s poloměrem r = 1 a středem v počátku. Budeme tedy generovat body v intervalu $\left(\langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle\right)$ a budeme zjišťovat, zda daný bod leží uvnitř kružnice, tzn. splňuje-li nerovnost $x^2 + y^2 < 1$. Obsah čtvrtkruhu je roven $\frac{\pi r^2}{4}$, tedy pro jednotkovou kružnici pouze $\frac{\pi}{4}$. Pokud tedy násobíme obsah čtvrtkruhu čtyřmi, dostáváme číslo π.



Obr.1 - výpočet čísla π pomocí čtvrtkružnice



Obr.2 - výpočet π pomocí elipsy

Počet bodů	10^3		10^5		10^7	
Číslo měření	Kruh	Elipsa	Kruh	Elipsa	Kruh	Elipsa
1	3.200	3.216	3.14364	3.14648	3.1413780	3.1423960
2	3.144	3.024	3.14216	3.14440	3.1427912	3.1411304
3	3.100	3.240	3.14880	3.13368	3.1412712	3.1398808
4	3.176	3.152	3.14564	3.12608	3.1415824	3.1423216
5	3.076	3.032	3.13564	3.14464	3.1413052	3.1402304
6	3.132	3.064	3.13892	3.12816	3.1427072	3.1415344
7	3.104	3.216	3.14312	3.16048	3.1414204	3.1415384
8	3.088	3.080	3.14596	3.13424	3.1419068	3.1420936
9	3.272	3.056	3.14548	3.13864	3.1417596	3.1390248
10	3.176	3.080	3.13740	3.15616	3.1421792	3.1411936
Aritm. průměr	**3.1468**	**3.116**	**3.142676**	**3.141296**	**3.14183012**	**3.141134**
Odchylka od π	**-0.00521**	**0.025593**	**-0.001083**	**0.000297**	**-0.0002375**	**0.000458**

Tab.1 - hodnoty měření čísla π pomocí kružnice a elipsy.

Také můžeme vypočítat číslo π pomocí čtvrtky elipsy s poloosami 1 a 0,5. Opět budeme vybírat body z intervalu $(0;1)\times(0;1)$ a budeme zjišťovat, zda bod splňuje rovnici : $x^2 + 4y^2 < 1$. Nyní ale musíme výsledek násobit osmi, protože obsah naší elipsy je 0,5π.

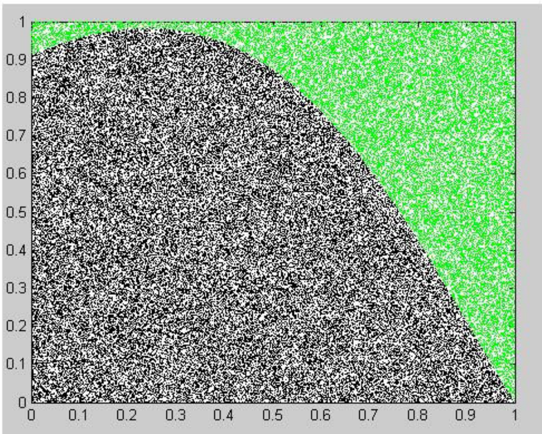
Výpočet jsme provedli desetkrát pro určitý počet bodů. Pro 1000 hodů byl výsledek ještě nepřesný. Pro větší počet hodů se přesnost výrazně zlepšila.

4 Výpočet obsahu pomocí metody MC

Výpočet obsahu pomocí metody MC je vhodný zvláště pro případy, kdy potřebujeme spočítat obsah plochy pod grafem funkce, ale nemůžeme použít jiné metody (např. integrování). Pokud chceme spočítat obsah plochy pod funkcí $y = x \cdot \cos(e^x) + 0{,}912$ v intervalu $\left(0;1\right)$. Provedli jsme opět třikrát deset měření, podobně jako u π. Výsledek jsme porovnali s výsledkem,který jsme dostali pomocí obdélníkové metody, kdy jsme interval $\left(0;1\right)$ rozdělili na 99 999 999 dílků.

Měření č.	**Počet bodů**	**10^3**	**10^5**	**10^7**
1		0.718	0.72214	0.7221496
2		0.720	0.72131	0.7221243
3		0.737	0.72293	0.7224203
4		0.728	0.72255	0.7221460
5		0.715	0.72137	0.7224054
6		0.697	0.72261	0.7221860
7		0.717	0.72396	0.7222902
8		0.712	0.72269	0.7219560
9		0.730	0.71948	0.7220890
10		0.739	0.72223	0.7221543
Aritm. průměr		0.721	0.72213	0.7221921
Obdélníková metoda				0.722225237

Tab.2 – obsah funkce $y = x \cdot \cos(e^x) + 0{,}912$ v intervalu $\left\langle 0;1 \right\rangle$

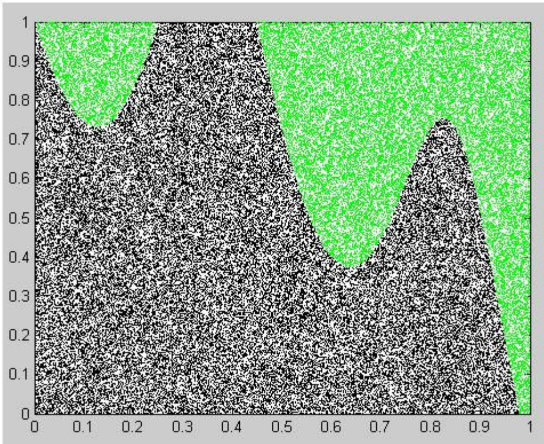


Obr.3 – výpočet obsahu plochy pod funkcí: $y = x \cdot \cos(e^x) + 0{,}912$

Ještě hodnotnější je výpočet plochy pod grafem pro implicitně zadané funkce, které nelze převést do explicitního tvaru, tedy nelze použít ani obdélníkovou metodu. Příkladem takové funkce je funkce $0{,}1\tan(xy) = \ln(x^2 + y) + 0{,}3\sin(13x)$. Opět nás zajímá obsah v intervalu $\left(0;1\right) \times \left(0;1\right)$. Použití metody MC je zde naprosto jedinečné, protože jiné metody zde nefungují.

Měření č.	Počet bodů	10^3	10^5	10^7
1		0.677	0.68821	0.689266
2		0.708	0.68897	0.68946
3		0.675	0.6919	0.689311
4		0.689	0.68849	0.689278
5		0.697	0.69076	0.68911
6		0.695	0.68961	0.689346
7		0.694	0.69146	0.68918
8		0.685	0.69146	0.689261
9		0.672	0.68899	0.689185
10		0.704	0.69076	0.689251
Aritm. průměr		0.689	0.690061	0.689265

Tab.3 – Obsah plochy pod funkcí: $0.1\tan(xy) = \log(x^2 + y) + 0.3\sin(13x)$



Obr.4 - funkce $0.1\tan(xy) = \log(x^2 + y) + 0.3\sin(13x)$

5 Shrnutí

Metoda Monte Carlo je velice užitečná při výpočtu čísla π a při výpočtu obsahu rovinných obrazců. Význam této metody spočívá hlavně v tom, že je metoda účinná při počítání obsahů, při kterých ostatní metody selhávají.

Poděkování

Děkujeme všem lidem, kteří se podíleli na přípravě Fyzikálního týdne 2007.

Reference:

[1] M. Virius: Aplikace matematické statistiky -- Metoda Monte Carlo. ČVUT, Praha 1985.

[2] http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Monte_Carlo_method&oldid=138037321