Rezonanční jevy na LC oscilátoru a závaží na pružině

M. Stejskal, K. Záhorová*, J. Řehák**
Gymnázium Emila Holuba, Gymnázium J.K.Tyla*, SPŠ Hronov**

Abstrakt

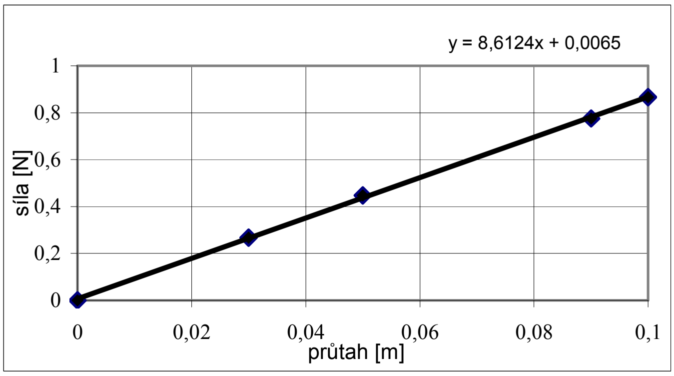
Zkoumali jsme rezonanční frekvenci závaží na pružině a LC oscilátoru. Pomocí tuhosti pružiny a hmotnosti závaží jsme zjistili vlastní frekvenci mechanického oscilátoru a zjistili, že je shodná s rezonanční frekvencí. V další části projektu jsme pozorovali závislost frekvence na napětí v paralelním LC obvodu. Nakonec jsme do grafů zakreslili rezonanční křivky.

1 Úvod

Při kmitání oscilátoru platí druhý Newtonův pohybový zákon a zároveň , že $F = -k \cdot x$, kde F je síla kterou potřebujeme na protažení pružiny o x metrů, *k* je tuhost pružiny a *x* délka protažení. Z toho plyne $m \cdot a = -k \cdot x$ a je první derivace rychlosti v závislosti na čase a zároveň druhá derivace polohy v závislosti na čase. Pojem derivace je náročná matematická operace, nicméně pokusíme se ji přiblížit. Známe-li dráhu a polohu tělesa jako funkci času x≡x(t) můžeme snadno vypočítat průměrnou rychlost mezi dvěmi body jako $\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$.
Průměrná rychlost nám ale neřekne nic konkrétního o tom, jakou okamžitou rychlostí se těleso pohybovalo v konkrétním okamžiku $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$. Abychom zjistili tuto okamžitou rychlost, je třeba aby interval $\langle t_1; t_2 \rangle$ byl „nekonečně" malý – musíme tedy donekonečna přibližovat t_1 k t_2. Potom se průměrná rychlost $\bar{v}$, definovaná dle výše uvedeného vztahu bude přibližovat k rychlosti okamžité. Tomuto postupu se říká derivování. Provedeme-li operaci pro libovolný čas t, získáme novou funkci v≡v(t) – tedy závislost rychlosti na čase. Obdobným způsobem získáme zrychlení jako funkci času a≡a(t). Operaci derivování značíme čarou za symbolem funkce a tedy v(t) = x'(t) a dvě po sobě provedené derivace dvěmi čarami, tedy a(t) = v'(t) = x''(t). Vraťme se nyní k pohybové rovnici závaží na pružině. Dosadíme-li za zrychlení druhou derivaci polohy a provedeme elementární úpravy, dostaneme rovnici $x'' + \frac{k}{m} x = 0$. Člen $\frac{k}{m}$ označujeme jako ω^2. Řešením této rovnice je taková funkce, která splňuje vztah pro libovolné t. Nejjednodušší tvar řešení je $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, kde konstantu A nazýváme amplituda, konstantu φ fáze a ω úhlová frekvence. Vzhledem k tomu, že funkce sin je periodická vrátí se závaží po nějakém čase do výchozí polohy (tento čas se nazývá perioda a lze jej vyjádřit jako $T = \frac{2\pi}{\omega}$) a děj se znovu opakuje. Rovnice ve tvaru $x'' + \omega^2 x = 0$ se ve fyzice vyskytuje velice často, všechny děje jí popsané jsou periodické a příslušné fyzikální systémy se nazývají harmonické oscilátory.

2 Mechanický a LC oscilátor

Nejprve jsme změřili průtah pružiny, na kterou jsme zavěšovali závaží o různé hmotnosti. Ze čtyř naměřených hodnot jsme vypočítali tuhost pružiny. V grafu 1 je vidět závislost průtahu pružiny na síle (hmotnosti závaží) která působí na pružinu.



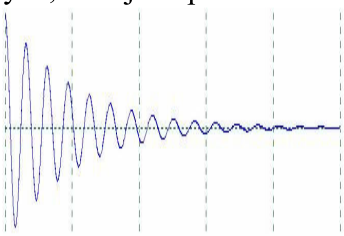
Graf 1: Vztah mezi průtahem pružiny a sílou, které na ni působí je přímá úměrnost. Konstanta úměrnosti se nazývá tuhost a z proložení naměřených hodnot přímkou vyšlo k = 8,61 N. m^{-1}.

Poté jsme pružinu vychýlili z rovnovážné polohy a nechali oscilátor kmitat, abychom zjistili vlastní frekvenci oscilátoru, kterou jsme ověřili výpočtem. Frekvence, které jsme změřili a které jsme vypočítali, se lišili o 3%.

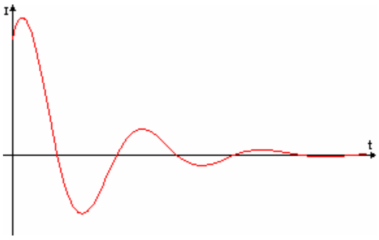
Naměřená tuhost pružiny:	8,61 N. m^{-1}
Rezonanční frekvence vypočítaná:	1,87Hz
Rezonanční frekvence naměřená:	1,95Hz

Tabulka 1: naměřené i vypočítané hodnoty

Když do oscilátoru přidáme tlumení, tak se strmost klesání amplitudy zvýší. Pokud použijeme tlumení musíme do rovnice $F = -k \cdot x$ přidat tlumící sílu F_t poté vznikne rovnice $F_t + F = -k \cdot x$ po úpravě dostaneme $x'' + 2\sigma \cdot x' + \omega^2 \cdot x = 0$. σ označuje dekrement tlumení a z rovnice vyplývá, že σ je exponenciální.



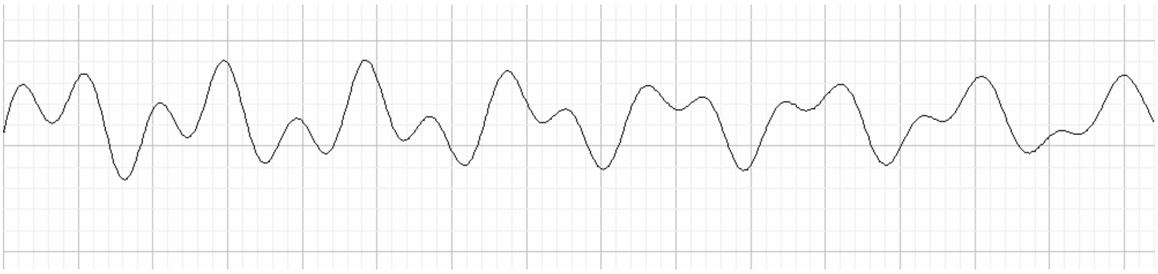
Obrázek 1: nízké tlumení



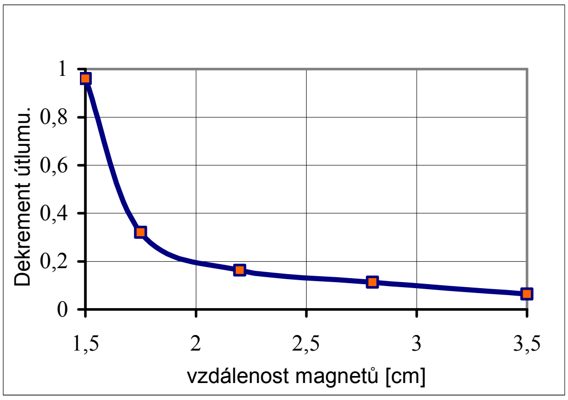
Obrázek 2: vysoké tlumení

Čím blíže magnety byly (čím větší bylo tlumení, způsobené vířivými proudy), tím rychleji se oscilátor přestal kmitat. Ověřili jsme, že amplituda se snižuje exponenciálně. Dekrement útlumu strmě roste při nižší vzdálenosti magnetů, jak je vidět z grafu 2.

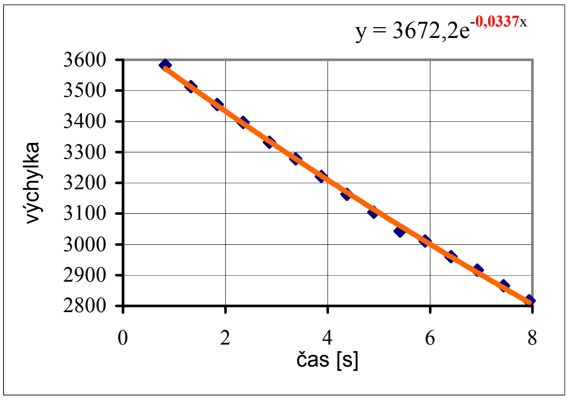
Dekrement útlumu je EXCELem vypočítaná veličina. Zjistili jsme ji po zadání hodnot vrcholů amplitud do grafu a proložení exponenciální křivkou. Z funkce: $y = e^{-\alpha x}$ excel vypočítá dekrement který je označen α.



Graf 2 : při buzení 1Hz



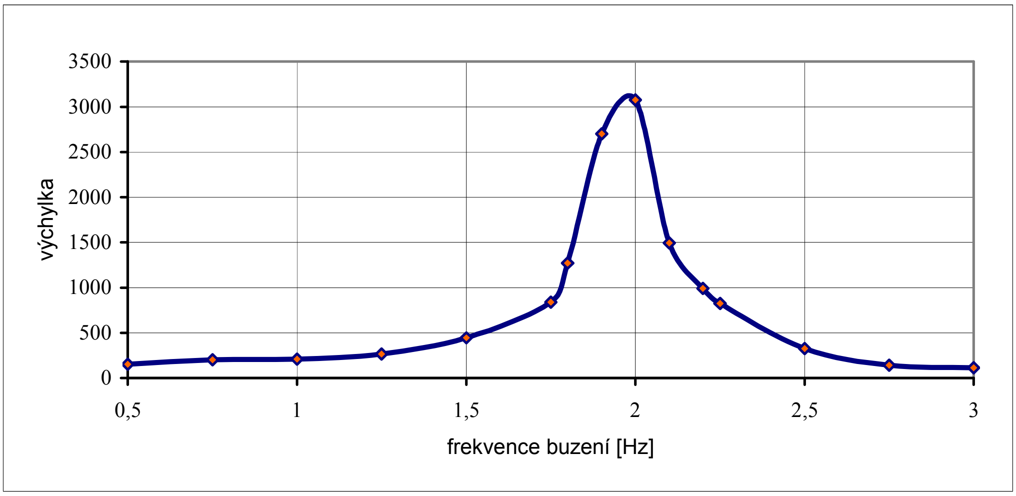
Graf 3: závislost dekrementu útlumu na vzdálenosti magnetů.



Graf 4: závislost výchylky na čase proložená exponenciálou dekrement zde je 0,0337.

Rezonance je jev, při kterém, dochází ke sčítání amplitud ze zdroje a vlastní amplitudy oscilátoru.Při prvním kmitu dodá buzení určitou energii, ta oscilátoru zůstane a při dalších kmitech se přičítá další energie, proto při rezonanci dosahuje výchylka největší hodnoty. Oscilátor rezonuje, když jeho vlastní frekvence se rovná frekvenci buzení. Rezonanční křivka je graf, ve kterém je znázorněno při jaké frekvenci má výchylka nejvyšší amplitudu.
Pro nucené kmitání musíme rovnici upravit takto $x'' + \omega^2 x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

Pro zjištění rezonanční křivky jsme použili budič u kterého jsme mohli měnit frekvenci kmitů a tedy určovat závislost maximální velikosti výchylky na frekvenci buzení. Námi naměřená rezonanční křivka je na grafu.



Graf 5: Závislost výchylky na frekvenci buzení, rezonanční frekvence je přibližně 1,95Hz.

Elektrické oscilátory jsou tvořeny převážně z LC členů, protože při změně indukčnosti cívky nebo kapacity kondenzátoru o desetinásobek se frekvence změní o 3,16 protože v Thomsonově vztahu $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ je L a C pod odmocninou a tudíž LC oscilátory jsou docela stabilní a právě kvůli stabilitě se používají v přijímačích. LC oscilátor funguje na principu přelévání energie z cívky do kondenzátoru a opačně.

V druhé části našeho měření jsme se zabývali paralelním LC článkem.

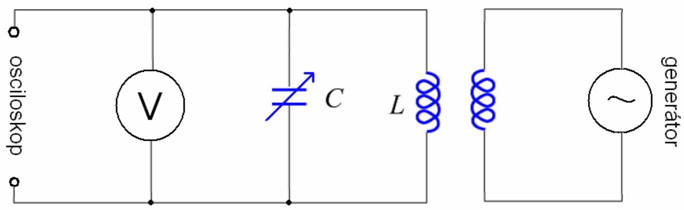
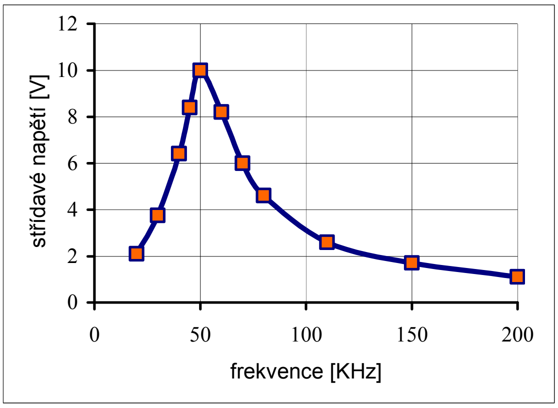


Schéma zapojení: obvodu, který jsme měřili.

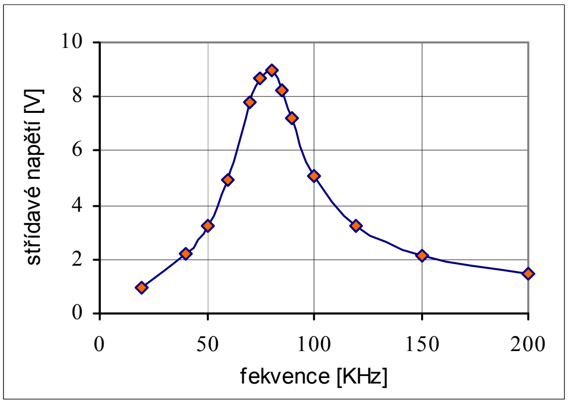
Proměnný kondenzátor jsme nastavili na kapacitu 1nF a na osciloskopu jsme sledovali kdy je amplituda kmitů nejvyšší. Zkoušeli jsme rezonanci pro cívku se vzduchovým jádrem, poté jsme do ní vložily feromagnetický materiál a opět zjišťovali rezonanci. Víme, že platí vztah: $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ po úpravě dostaneme $L = \frac{1}{f^2 4\pi^2 C}$

Rezonanční frekvence	Indukčnost cívky	jádro
50,0KHz	10,1mH	feromagnetické
78,6KHz	4,1mH	vzduchové

Tabulka 2: zapojení podle schématu nahoře, C = 1nF



Graf 6: rezonanční křivka LC obvodu, C = 1nF, L = 10,1mH – feromagnetické jádro, rezonanční frekvence je 50KHz



Graf 7: rezonanční křivka LC obvodu, C =1nF, L = 4,1mH – vzduchové jádro, rezonanční frekvence 78,6KHz

3 Shrnutí

Takže zjistili jsme, že v rezonanci mají stroje a přístroje největší amplitudu. Teoreticky je nekonečná ale vzhledem k tření a mechanickým rozměrům je omezená. Stroje v rezonanci jsou nejvíce namáhány a jejich životnost se značně snižuje.

Poděkování

Zvláštní poděkování patří našemu supervizorovi Ing. Vladimíru Pospíšilovi za ochotnou pomoc s úvodem.

Reference:

[1] HALLIDAY D. – RESNICK R. – WALKER J.: FYZIKA – ELEKTŘINA A MAGNETISMUS *Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 1997,* 33.2 Kvalitativní rozbor kmitů, str. 860-862

[2] FEYNMAN R. – LEIGHTON R. – SANDS M.: *FEYNMANOVY PŘEDNÁŠKY Z FYZIKY s řešenými příklady* FRAGMENT , 2000 , str. 286-322

[3] NEZNÁMÝ AUTOR.: Kmitání, http://cs.wikipedia.org/wiki/Oscil%C3%A1tor#LC_oscil.C3.A1tory, [23. 5. 2007]