

# Úvod do chaotické dynamiky

Jakub Dohnal, Střední škola stavební Jihlava, jakudon@centrum.cz  
Kristýna Onderková, gymnázium Budějovická, Praha, padawanka@gmail.com  
Libor Šeda, gymnázium Vysoké Mýto, Oromis.E@seznam.cz

## Abstrakt:

Pod pojmem chaos si většina lidí představí něco naprosto neuspořádaného a neorganizovaného. Zjistili jsme, že to není úplně pravda. Zabývali jsme se studiem a rozpoznáváním chaotických dějů a podmínek, které vedou k jejich vzniku. Zvláštností chaosu je možnost aplikovat tyto poznatky na jevy vyskytující se v životě, jako jsou např. dopravní zácpa, populační vývoj, chování davu atd. a částečnému předvídání možného vývoje soustavy a jejích krajních mezí.

## 1 Úvod

Stačí pouhé tři nelineární diferenciální rovnice. O tom se přesvědčil už Lorenz, když jeho model počasí právě o třech rovnicích byl tak nepředvídatelný, že jeho kolegové uzavírali sázky, co udělá příště. Když je to tak jednoduché, tak proč se na to nepřišlo už dříve? Ono se na to přišlo (Lorenzův objev byl vlastně náhodný), ale vědci zabývající se chaosem museli překonat mnoho obtíží - jejich závěry si odporovaly s tehdejší fyzikální vnímáním světa, naznačovaly omezení snahy člověka ovládnout přírodu, a také de facto ustanovily mez pro počítače.

V minulosti byla tendence připisovat malé nevysvětlitelné nepravidelnosti pozorovaných jevů nepřesnosti přístrojů, šumu, náhodným vlivům... Myslelo se, že malá změna počátečních podmínek vyvolává malé změny chování systému v budoucnu. Předpokládala se prediktabilita chování systému. Počátkem 19.století francouzský vědec Laplace došel k názoru, že všechny události jsou jednou provždy určeny - determinovány. Domníval se, že existuje soubor vědeckých zákonů, jejichž znalost nám umožní předpovědět všechno, co se ve vesmíru v budoucnosti odehraje. Stačí k tomu dokonale poznat stav vesmíru v určitém časovém okamžiku.

Poincaré jako první ve svých spisech naznačil jistou nepředvídatelnost dynamiky. V 60.letech 20.století objevil E. Lorenz jev, který byl později pojmenován jako efekt motýlích křídel: pokud někde na planetě existuje stav počasí takový, že možnost bouřky a klidu je naprosto stejná, stačí malé zamávnutí motýla křídly k tomu, aby se situace přiblížila k jedné nebo ke druhé možnosti => i pro velmi malé rozdíly v počátečních podmínkách jsou výsledné stavy diametrálně odlišné. Analogický je příklad psa, který vybírá ze dvou naprosto stejných misek granulí. Chování psa zobrazuje Lorenzův atraktor. Termínem *chaos* je označena taková vlastnost nějakého dynamického a současně i deterministického systému, při jejíž platnosti je nemožné vypočítat budoucí stav systému. Chaos nastává zejména u těch dynamických systémů, které vykazují velkou citlivost na počáteční podmínky. V takových systémech se při volbě minimálně dvou nekonečně blízkých počátečních bodů (reprezentujících počáteční podmínky systému)

tyto dva body posléze exponenciálně vzdalují, takže budoucí stav systému není možné žádným způsobem předpovědět.

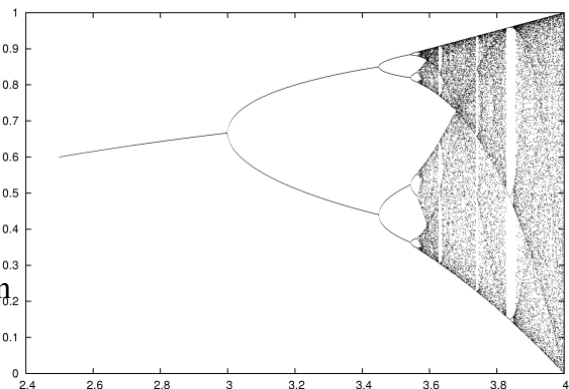
Dalším systémem citlivým na počáteční podmínky je systém složený z kužele a kuličky postavené na vrcholu tohoto kužele. V závislosti na nekonečně malých změnách počátečních podmínek kulička spadne do libovolného směru, a může tak dramaticky ovlivnit další chování systému. U obou zmíněných systémů dokonce platí věta, že stav systému není možné změřit naprosto přesně, protože již samotné měření chování systém ovlivňuje.

## 2 Slovník

**Chaos** znamená neperiodické deterministické chování, které je velice citlivé na počáteční podmínky. Odvozuje z řeckého  $\chi\alpha\omicron\varsigma$  a typicky označuje nepředvídatelnost [1].

**Bifurkace** (obr č.1) označení pro bod zvratu na vývojové linii, kdy v důsledku nerovnováhy negativních a pozitivních zpětných vazeb dojde k rozdělení trajektorie vývoje původní kvality v několik nových struktur, které se kvalitativně liší.

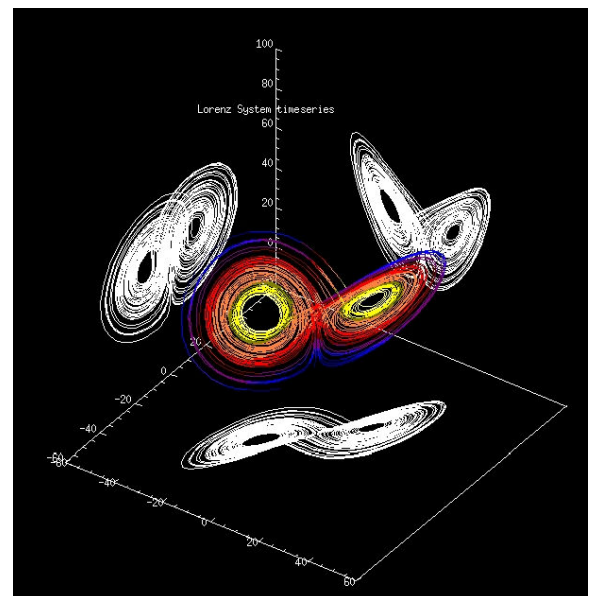
Obr. č.1  
Bifurkační diagram



**Atraktor** (obr č.2) je konečný stav systému. Například pro reálné kyvadlo platí, že atraktorem je stav, kdy kyvadlo nemá kinetickou energii a potenciální energie je nejmenší, tedy kdy se přestane houpat. Naproti tomu atraktorem pohybu planety (Země) je uzavřená elipsa. Některé systémy mají podivný atraktor, vykazují chaotické chování. Všechny chaotické atraktory jsou fraktály. Rozeznáváme tedy tři druhy atraktorů:

- Bodové
- Cyklické (kruh, osmička...)
- Podivné (nekonečné)

Obr. č.2  
Lorenzův atraktor  
[2]



**Poincarého řez** Zachycení vlastností fázového portréту v prostoru nižší dimenze je projekce nebo řez vícerozměrného útvaru obecnou plochou. Zjednodušeně je Poincarého řez podmnožina fázového portréту, v němž má jedna nebo více stavových proměnných konstantní hodnotu (viz. Chaotické kyvadlo).

### 3 Naše měření

K zkoumání chaosu jsme použili chaotické kyvadlo, generátor chaosu napojený na osciloskop a počítačové programy Billiard, Chaosgen a DoublePendulum.

#### 3.1 Populace zajíců na ostrově

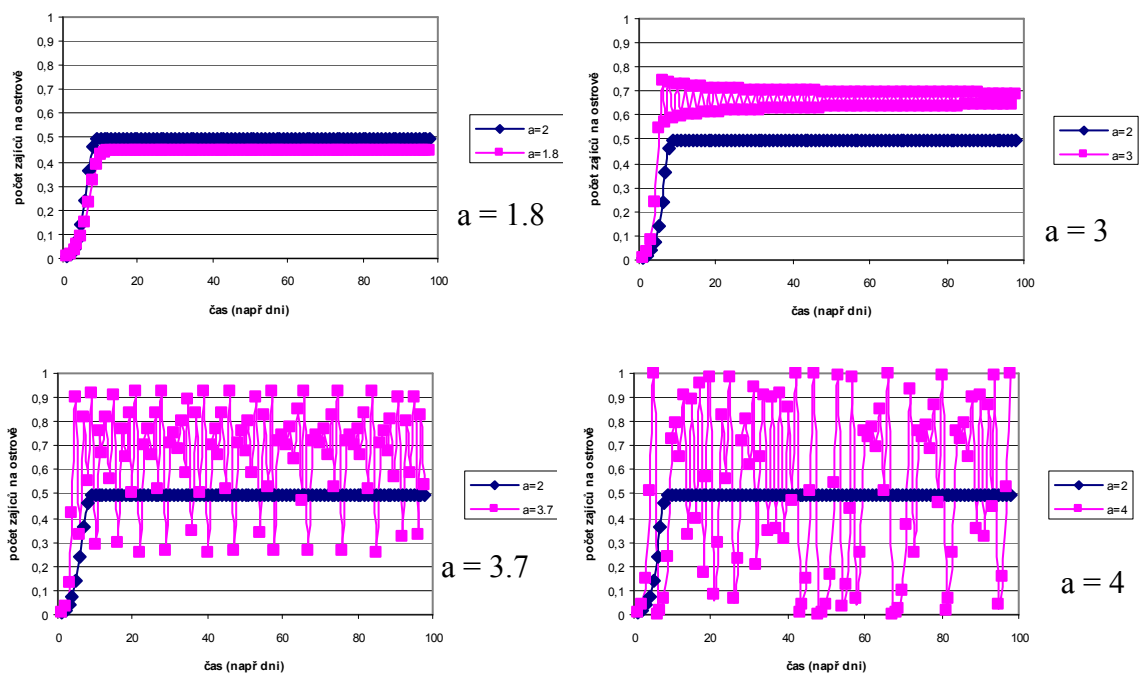
Představme si vývoj populace zajíců na ostrově. Začnou se mezi sebou množit a vytvářet kolonie až do doby, kdy se přemnoží. Počet jedinců se ustálí nebo osciluje okolo nějaké hodnoty v závislosti na přirozeném přírůstku a úmrtnosti.

Systém lze popsat rovnicí  $x_2 = a \cdot x_1 \cdot (1 - x_1)$ , kde  $a \cdot x_1$  je množení zajíců a  $(1 - x_1)$  je úmrtnost. (Graf 1)

$a < 2$ .....ustálený systém

$2 < a < 3,7$ .....ustálený systém s periodickým střídáním počtu jedinců n-té generace

$3,7 < a < 4^1$ .....systém se chová chaoticky

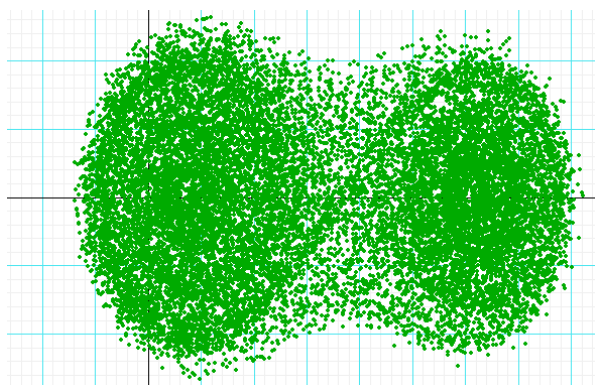
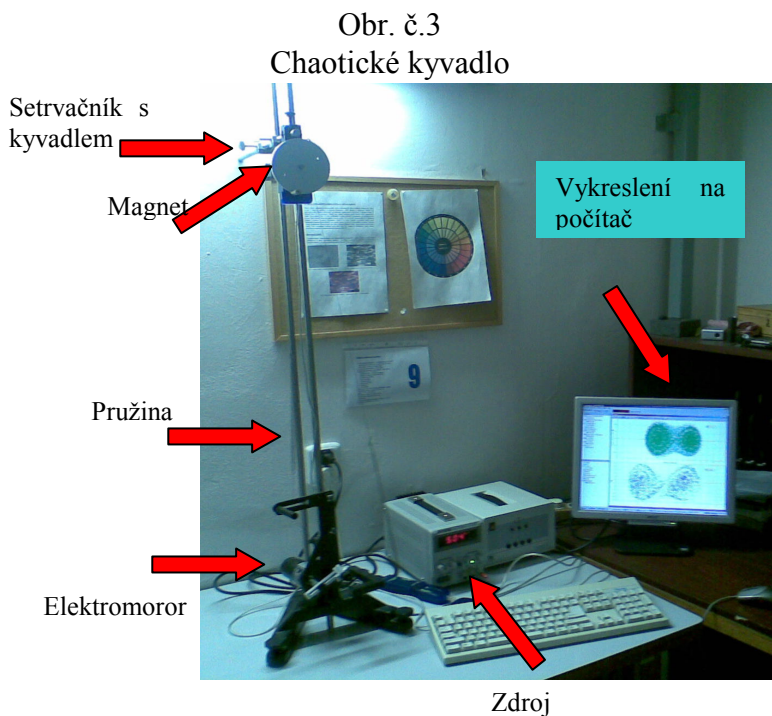


Graf 1:  
Vývoj populace zajíců

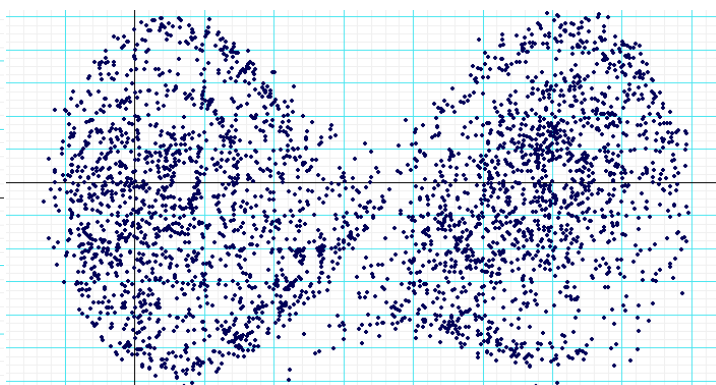
<sup>1)</sup> Excel nedokáže dále počítat

### 3.2 Chaotické kyvadlo

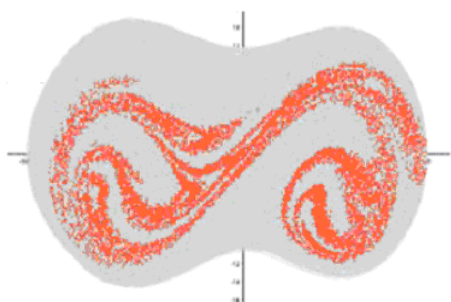
Elektromotor nepřímo pohání kyvadlo přes táhlo, na kterém je umístěno čidlo a provázek. Na provázku je umístěna pružinka. Na vrchu stojanu je umístěn setrvačnick s kyvadlem a magnetem (nelineární člen), který brzdí masivní setrvačnick. Z druhé strany pružinka upevněna přímo k podstavci. Na podstavci se nacházejí čidla, ze kterých jsou data snímána do počítače (obr. č.3).



Obr. č.4  
Závislost úhlové  
rychlosti na poloze



Obr. č.5  
Poincarého mapa

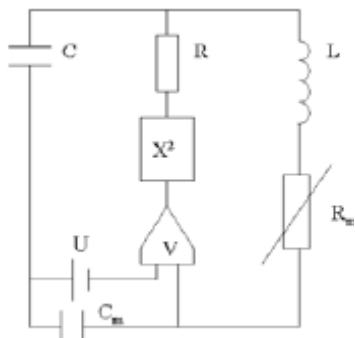


Obr. č.6  
Poincarého  
mapa (vzorová)

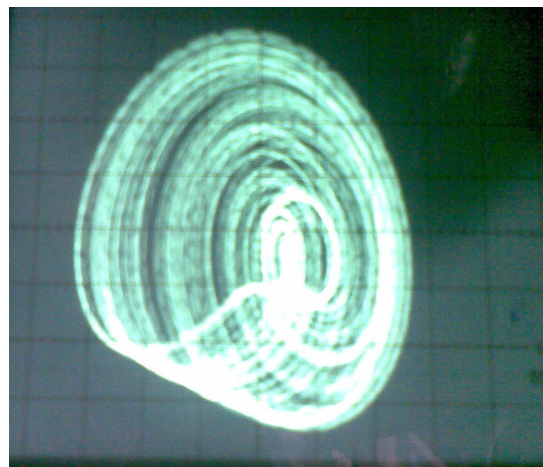
Zachytili jsme pohyb chaotického kyvadla (obr. č.4) a dále jsme vykreslili Poincarého mapu (obr. č.5). Naše výsledky se mírně liší od vzorového obrázku (obr. č.6) od výrobce kyvadla.

### 3.3 Generátor chaosu zapojený na osciloskop

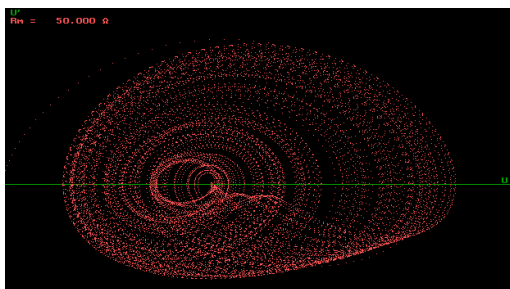
Generátor se skládá z jednoduchého (nelineárního) RLC obvodu (Obr. č.7), u kterého sledujeme výstupní napětí  $U$  a  $U'$  (analogie polohy a hybnosti). Změnou hodnoty ladícího odporu  $R_m$  lze ukázat přechod od stabilního systému s jedním řešením přes systém s více řešeními až k chaotickému chování. Chování systému jsme zkoumali jak na elektrickém modelu (Obr. č.8). tak s pomocí počítačové simulace (Obr. č.9).



Obr. č.7  
RLC obvod generátoru



Obr. č.8  
Elektrický model

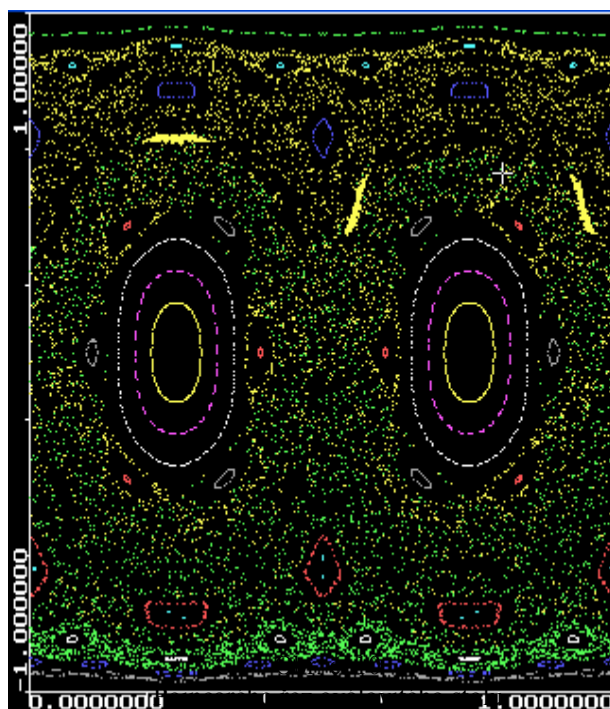


Obr. č.9  
Počítačová simulace  
generátoru

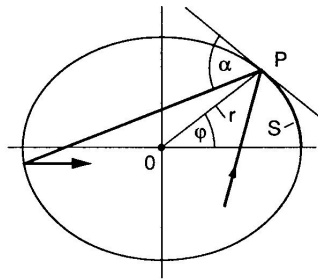
### 3.4 Billiard

V programu jsou nadefinovány různé typy stolů, po kterých se bude „koule“ pohybovat. My jsme zvolili ovál (Obr. č. 10), protože jsou v něm velice dobře patrné zóny, kde se bude koule pohybovat zcela chaoticky. Tyto místa jsou znázorněna tečkami, zatímco místa s předvídatelným pohybem jsou znázorněna křivkami. Dále jsou zde na výběr kruh a elipsa, které ale nejsou chaotické útvary, tzn. ve všech místech jejich vnitřní plochy je dráha koule předvídatelná.

Protože fázový prostor takového systému je 4-rozměrný (2x poloha, 2x rychlost), použijeme Poincarého řez fázovým prostorem a sledujeme pouze dva parametry (Obr. č.11) – obloukovou délku v horizontálním směru a tečnou komponentu rychlosti koule v okamžiku odrazu ve vertikálním směru ( $p = \cos \alpha$ ). Volbou těchto podmínek lze také vyšetřovat chování systému.



Obr. č.10  
Poincarého mapa



Obr. č.11  
Schéma odrazu koule

## 4 Diskuse

Výsledky našich měření s chaotickým kyvadlem byly ovlivněny několika faktory jako je třeba zahřívání elektromotoru, prodloužení pružin v důsledku opotřebení, nedostatečné ukotvení stojanu či nevodornost podložky. U takto citlivého experimentu ovlivňují měření i zdánlivě nepodstatné skutečnosti jako např. proudy vzduchu, pohyb stolu atd. Veškerá měření byla dozajista ovlivněna i vysokou teplotou v laboratoři.

## 5 Shrnutí

Zkoumali jsme základy chaotické dynamiky a snažili jsme se ji lépe poznat. Seznámili jsme se elektrickým generátorem chaosu, chaotickým kyvadlem a několika programy. Všem se nám to velice líbilo a užili jsme si hodně chaosu.

## Poděkování

Děkujeme našim školám a učitelům, že nám dovolili se účastnit této skvělé akce. Dále bychom chtěli poděkovat organizátorům FT za poskytnutí prostředků k „badatelské“ činnosti, našemu supervizorovi panu Ing. Ondřejovi Svobodovi za trpělivost a pomoc.

## Reference:

- [1] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Chaos> (2.6.2008)
- [2] [http://bp3.blogger.com/\\_xoBIPoObedw/Rw3Re17ZwbI/AAAAAAAAAxs/Ox8LrFWqY-E/s1600-h/chaos-theory02.jpg](http://bp3.blogger.com/_xoBIPoObedw/Rw3Re17ZwbI/AAAAAAAAAxs/Ox8LrFWqY-E/s1600-h/chaos-theory02.jpg) (2.6.2008)
- [3] [http://cs.wikipedia.org/wiki/Mot%C3%BDI%C3%AD\\_efekt](http://cs.wikipedia.org/wiki/Mot%C3%BDI%C3%AD_efekt) (2.6.2008)
- [4] <http://www.sweb.cz/chaos.fraktaly/> (2.6.2008)
- [5] Svoboda O.:Úvod do chaotické dynamiky – příprava na FT2008