# Počítačové zobrazování fraktálních množin

O.Lanč*, K. Tesař**, P. Vahalová***

*Gymnázium Otokara Březiny a SOŠ Telč
**SPŠ elektrotechnická Plzeň
***Gymnázium Plasy

*lancondrej@centrum.cz
**kaja.tesar@seznam.cz
***vahalovapetra@seznam.cz

**Abstrakt:**

Cílem našeho miniprojektu bylo bližší seznámení s fraktálními množinami, jejich počítačovým zobrazením a možným použitím v praxi.

# 1 Úvod

Hlavní náplní naší práce bylo nalezení algoritmů pro počítačové zobrazení Mandelbrotovy a Juliových množin s použitím zdrojových kódů pro vykreslování bodů a seznámení se s dalšími základními poznatky o fraktálních množinách.

Fraktál je geometrický objekt, který lze definovat například jako množinu s následujícími vlastnostmi:

- soběpodobnost – objekt je složen z útvarů, které jsou zmenšeninami původního objektu
- složitá geometrická struktura, kterou lze často popsat jednoduchou opakující se matematickou funkcí
- Hausdorffova (fraktální) dimenze je větší než dimenze topologická

Avšak neexistuje žádná obecně platná definice fraktálů.

# 2 Fraktální geometrie

Fraktální geometrie je vědní obor rozvíjející se od 60. let 20. století. Zabývá se studiem složitých geometrických útvarů, nazývaných fraktály. Za zakladatele je považován Benoit B. Mandelbrot, který poprvé matematicky definoval fraktál, ačkoli fraktály byly známy již před Mandelbrotem například v podobě přírodních útvarů.

## Topologická dimenze

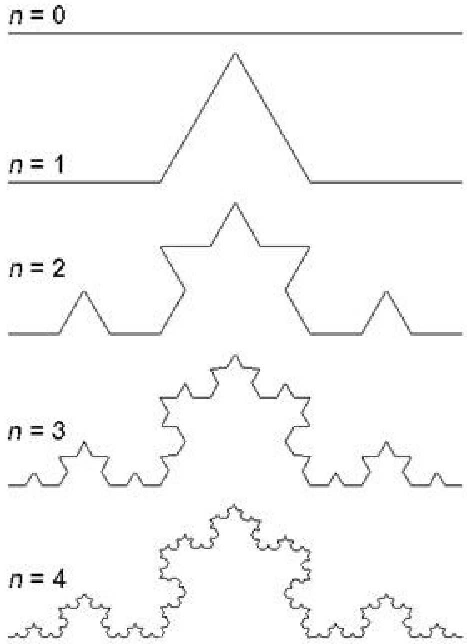
Topologická dimenze určuje počet parametrů, který je potřebný k popsání určitého bodu tělesa. Například k určení bodu na přímce, sinusoidě apod. stačí pouze jeden parametr, proto má přímka topologickou dimenzi jedna. Chceme-li určit bod v rovinném obrazci (např. čtverec, kruh) potřebuje k popsání tohoto bodu dva parametry, pak je topologická dimenze rovna dvěma, obdobně pro prostorové útvary rovna třem.

## Hausdorffova dimenze

Hausdorffova, někdy též nazývaná fraktální, dimenze popisuje složitost (členitost) objektů. Geometricky hladké objekty (přímka, čtverec, krychle, apod.) tedy mají Hausdorffovu dimenzi shodnou s topologickou. Avšak geometricky složitější útvary, jako fraktály mají tuto dimenzi větší než dimenzi topologickou a rozdíl mezi těmito dimenzemi udává složitost jednotlivých fraktálů (tj. čím větší rozdíl, tím je složitost větší). Hausdorffova dimenze nemusí nabývat celočíselných hodnot.

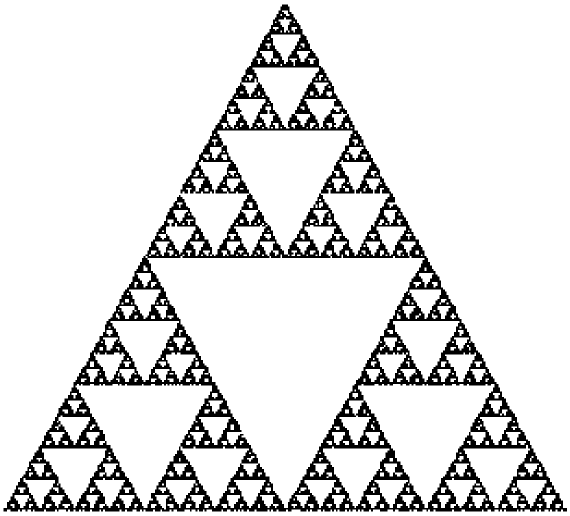
# 3 Základní fraktální útvary

## Kochova křivka




Princip tohoto fraktálního útvaru spočívá v tom, že při prvním kroku vycházíme z úsečky a v každém následujícím kroku ji rozdělíme na tři části a prostřední část nahradíme zvoleným vzorem, v tomto případě dvěma úsečkami svírajícími úhel 60°, zmenšenými na jednu třetinu svého původního rozměru.

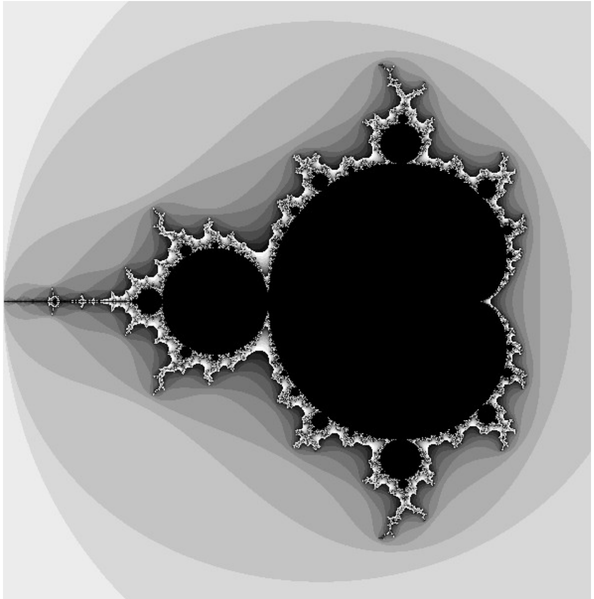
Číslo *n* udává počet provedených kroků. Hausdorffova dimenze Kochovy křivky je rovna log 4/log 3, což se přibližně rovná 1,27.



## Sierpinského trojúhelník

Rovnostranný trojúhelník rozdělíme středními příčkami na čtyři stejné části. Poté vyjmeme prostřední část a stejný postup stále opakujeme se zbývajícími třemi trojúhelníky.

# Benoit B. Mandelbrot a Mandelbrotova množina



Benoit B. Mandelbrot byl francouzský matematik polského původu narozen 20. ledna 1924. Studoval pod vedením Gastona Julii, po němž byly později pojmenovány Juliovy množiny. Mandelbrot je považován za zakladatele fraktální geometrie, jako první definoval pojem fraktál. Také je po něm pojmenována jedna z nejznámějších fraktálních množin – Mandelbrotova množina.

Mandelbrotova množina je definována jako množina komplexních čísel, pro která limita posloupnosti:

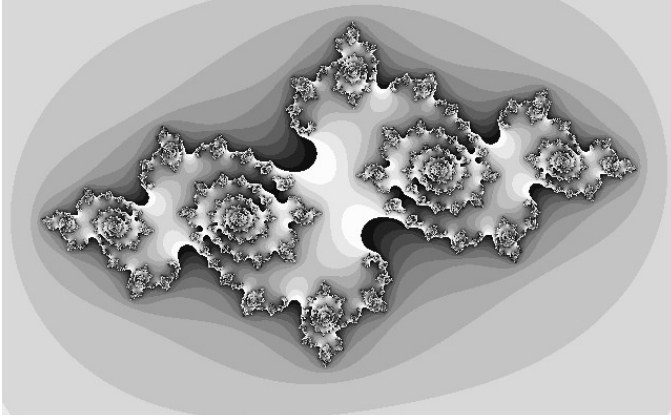
$$z_{n+1} = z_n^2 + c; \quad c = z_0$$

nenabývá nekonečna (diverguje).

Konstanta *c* je pro každý bod množiny jiná (podle zvoleného $z_0$).
Aby tedy číslo do množiny patřilo, nesmí absolutní hodnota kteréhokoli $z_n$ přesáhnout číslo 2.

```
// Funkce pro vypocet iteracni posloupnosti Mandelbrotovy mnoziny
int mandelbrot(double x, double y, int limit) // x, y - souradnice bodu; limit -
maximalni pocet iteraci
{
	double x1 = x, y1 = y;     // aktualni souradnice
	double x2, y2;             // pomocne promenne pro vypocty
	int i = 0;
// cyklus probihajici do doby, nez probehnou vsechny iterace, nebo dokud absolutni
hodnota c nepresahne 2
	while(i<limit && x1*x1+y1*y1<4.0)
	{
	// vypocet novych bodu
		x2 = x1*x1-y1*y1+x;
		y2 = 2.0*x1*y1+y;
		x1 = x2;
		y1 = y2;
		i++;
	}
	return limit-i;
}
```

# Juliovy množiny



Juliovy množiny jsou podobné množině Mandelbrotově s tím rozdílem, že konstanta *c* je pro celou množinu stejná. Konstanta *c* může být libovolná, tudíž Juliových množin je nekonečně mnoho.

```
// Funkce pro vypocet iteracni posloupnosti Juliovych mnozin
int julia(double x, double y, int limit, double cx, double cy)    // cx, cy -
konstantni hodnoty
{
	double x1 = x, y1 = y;     // aktualni souradnice
	double x2, y2;             // pomocne promenne pro vypocty
	int i = 0;
// cyklus probihajici do doby, nez probehnou vsechny iterace, nebo dokud absolutni
hodnota c nepresahne 2
	while(i<limit && x1*x1+y1*y1<4.0)
	{
		x2 = x1*x1-y1*y1+cx;
		y2 = 2.0*x1*y1+cy;
		x1 = x2;
		y1 = y2;
		i++;
	}
	return limit-i;
}
```

# 4 Využití fraktálů v praxi

- počítačová grafika – modelování přírodních krajin a objektů, například hory, říční systémy, stromy, kapradiny, apod., nejčastěji využíváno v počítačových hrách
- simulace průběhu difúze a jiných chaotických jevů
- umění

# 5 Shrnutí

Výsledkem naší práce bylo nalezení již výše zmíněných algoritmů pro počítačové zobrazení fraktálních množin, jejich zobrazení a získání mnoha nových poznatků o fraktální geometrii a jejím praktickém využití.

Naše další snahy v tomto oboru se budou ubírat směrem k vytvoření propracovanějšího programu a vhodných fráktálních množin pro umělecké účely.


# Poděkování

- Organizátorům Fyzikálního týdne 2008 – Vojtěch Svoboda, Marie Svobodová, Zuzana Sekerešová
- Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT
- Supervizorovi Ing. Petrovi Paušovi


# Reference:


[1] P.Pauš, *Počítačové generování fraktálních množin,* FJFI ČVUT 2003/2004 http://geraldine.fjfi.cvut.cz/~pausp/files/reserse.pdf

[2] P.Tišnovský, http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-i/ [cit. 3.6.2008]

[3] P.Tišnovský, http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-ii/ [cit. 3.6.2008]

[4] P.Tišnovský, http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-x/ [cit. 3.6.2008]