

Modelování fyzikálních dějů pomocí metody Monte Carlo

A. Slávik, D. Šafránek, Š. Kubašta

3. června 2008

Abstrakt

Cílem práce je vyšetřit distribuci dopadů projektilu po průletu prostředím s odporem a vlivem nahodných sil. Pomocí metody Monte Carlo byly provedeny opakované simulace (10000 opakování), ze kterých jsme získali údaje o dopadech v závislosti na velikosti fluktuací a koeficientu odporu. Závislost variance souřadnic dopadu na velikosti fluktuací se pro pevně zvolený koeficient odporu ukázala jako lineární a byl stanoven přibližný vztah pro x -ovou varianci $\sigma_x(f, r) \approx \frac{C}{\sqrt{r}} \cdot f$, kde C je konstanta.

1 Úvod

Prolétá-li vystřelený projektil atmosférou, kromě deterministických sil (např. tíhová, odporová) na něj působí i síly stochastické, které nelze přesně určit a považujeme je tedy za náhodné (např. vzdušné proudy). Z důvodu této náhodnosti můžeme operovat pouze se statistickými výsledky, k jejichž získání slouží metoda Monte Carlo. Jedná se o numerickou výpočetní metodu založenou na využití náhodných veličin a teorii pravděpodobnosti. Její podstatou je opakovaná realizace zkoumaného děje pomocí počítače. My jsme použili tuto metodu právě k modelaci působení výše zmíněných stochastických sil.

2 Průběh a výsledky

Simulovali jsme šikmý vrh pod elevačním úhlem 45 v prostředích s různým odporem pomocí Eulerovy iterační metody. Výslednice sil působících na projektil je dána jako

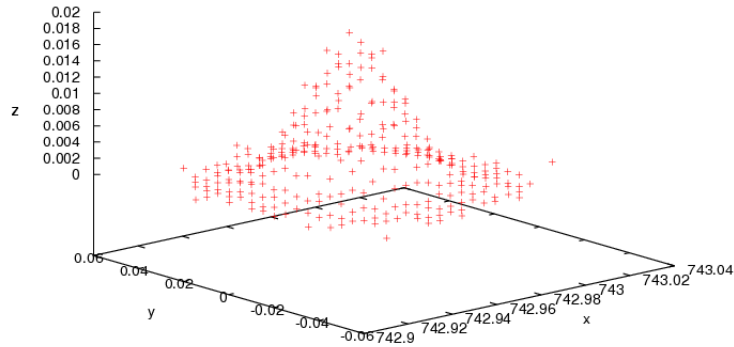
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_s, \quad (1)$$

kde \mathbf{F}_g je tíhová síla, \mathbf{F}_o odporová a \mathbf{F}_s výsledná stochastická. Tíhová a odporová síla jsou deterministické a jsou dány vztahy

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_o = -\frac{1}{2}CS\rho|\mathbf{v}|\mathbf{v} = -\frac{1}{2}r|\mathbf{v}|\mathbf{v} \quad (3)$$

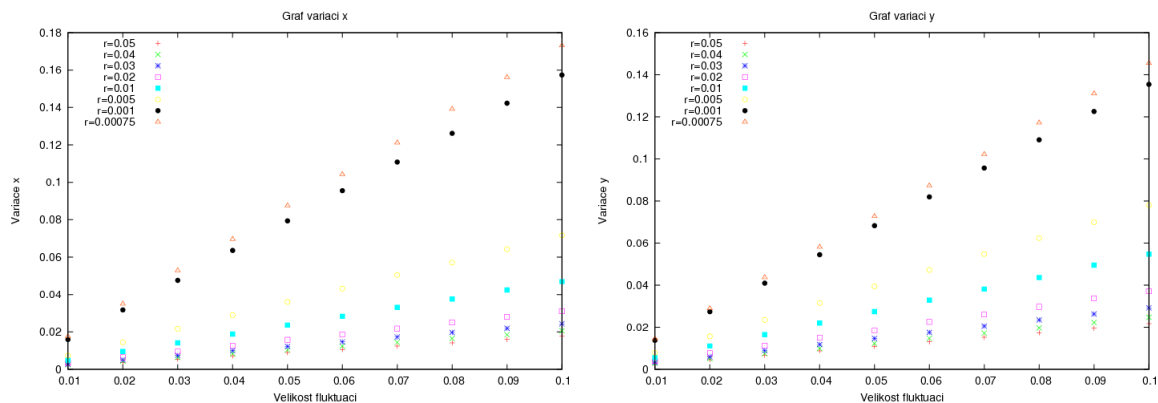
kde C je součinitel odporu, S obsah průřezu tělesa, ρ hustota okolního prostředí a \mathbf{v} rychlost tělesa. Zvolili jsme Newtonův model odporové síly, protože je pro naše rychlosti nejvhodnější. Působení stochastických sil jsme aproximovali působením jedné síly, jejíž velikost se ve všech třech rozměrech vybírala náhodně z pevně zvoleného rozsahu. Pravděpodobnost



Obrázek 1: Typická distribuce pravděpodobnosti dopadu projektilu. Vstupní hodnoty $f = 0,01 \text{ N}$, $r = 0,001 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$

těchto sil byla rozdělena uniformně. Všechny možné takovéto síly byly stejně pravděpodobné. Výsledné zrychlení urychlující těleso se pak určí podle 2. Newtonova zákona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

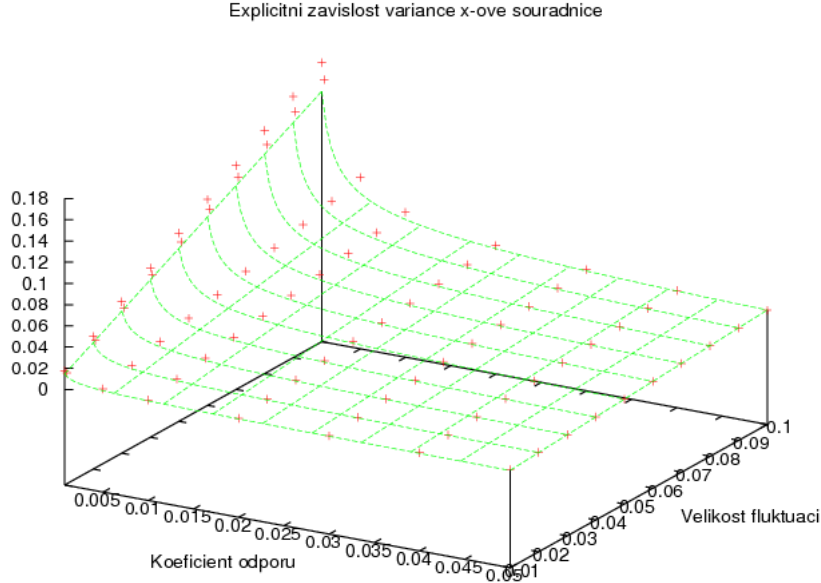
V našich simulacích jsme vzali jako konstantní tyto hodnoty: $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $m = 1 \text{ kg}$, $v = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Zkoumali jsme výsledné rozložení bodů dopadu projektilu v závislosti na dvou parametrech, a to $r = CS\rho$ a f , které představuje maximální velikost stochastické síly v jednom rozměru (celkově je tedy max. velikost této síly rovna $\sqrt{3}f$). Za r jsme dosazovali hodnoty $0,00075$; $0,001$; $0,005$; $0,01$; $0,02$; $0,03$; $0,04$; $0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ a za f hodnoty od $0,01$ po $0,1 \text{ N}$. V závislosti na těchto hodnotách jsme zkoumali variaci σ_x -ové a y -ové souřadnice dopadu, která je dána vztahem $\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$, resp. $\sigma_y^2 = \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle$ ¹. Pro každou kombinaci hodnot r a f jsme provedli 10000 simulací pomocí metody Monte Carlo.



Obrázek 2: Grafy závislostí variancí souřadnic místa dopadu (σ_x , σ_y) na velikosti fluktuací (f)

Výsledky dost zřejmě ukazují, že variance obou dopadových souřadnic jsou na velikosti

¹zde $\langle X \rangle$ značí střední hodnotu veličiny X .



Obrázek 3: Graf závislosti variance x -ové souřadnice místa dopadu (σ_x) na velikosti fluktuací (f) a koeficientu odporu (r), zelená síť je vypočítána pomocí přibližného vztahu $\sigma_x(f, r) \approx \frac{C}{\sqrt{r}} \cdot f$

fluktuací (max. možné velikosti \mathbf{F}_s v jednom směru) závislé lineárně, platí tedy

$$\frac{\partial \sigma_x(f, r)}{\partial f} = a(r) \quad (4)$$

(parciální derivace σ_x není závislá na f). Dále vidíme, že pro vyšší hodnoty koeficientu r nejsou nárůsty tak markantní, což nás vedlo k předpokladu, že existuje vztah mezi nárůstem variance v závislosti na velikosti fluktuací a tímto odporovým koeficientem. Pomocí lineární regrese jsme stanovili směrnice všech závislostí variací x -ové polohy dopadu na velikosti fluktuací a tyto směrnice jsme vynesli do grafu v závislosti na r . Následnou mocninou regresi byl stanoven přibližný vztah

$$\frac{\partial \sigma_x(f, r)}{\partial f} \approx \frac{C}{\sqrt{r}} \quad (5)$$

kde hodnotu konstanty C jsme stanovili přibližně na 0,04.

Tímto jsme našli přibližný vztah pro výše uvedenou funkci $a(r)$. Pokud budeme předpokládat, že platí přesně, můžeme ho řešit jako parciální diferenciální rovnici, kde obecným výsledkem budeme

$$\sigma_x(f, r) = \frac{C}{\sqrt{r}} \cdot f + K, \quad (6)$$

přičemž aby bylo splněno $\sigma_x(0, r) = 0$, bereme $K = 0$. Výsledný přibližný vztah má tedy podobu

$$\sigma_x(f, r) \approx \frac{C}{\sqrt{r}} \cdot f. \quad (7)$$

3 Závěr

Pomocí metody Monte Carlo jsme stanovili distribuci dopadů projektilu po průletu prostředím s odporem a působením stochastické síly. Ukázali jsme, že pro pevně zvolený koeficient u odporové síly závisí variance souřadnice místa dopadu lineárně na velikosti fluktuací. Navíc se nám podařilo nalézt přibližný vztah, který varianci x -ové souřadnice explicitně určí v závislosti na koeficientu odporu a velikosti fluktuací. Nakonec jsme ověřili, že metoda Monte Carlo je pro takovéto simulace za účelem získání statistických dat vhodná.

Poděkování

Na tomto místě bychom chtěli poděkovat především Ing. Hynkovi Lavičkovi, Ph.D., za odborné vedení naší práce a Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT za poskytnutí svých prostor i vybavení nezbytných pro provedení simulací.

Použitá literatura

- [1] Rektorys, K. a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky I*, Prometheus, Praha 1996. ISBN 80-85849-92-5.
- [2] *gnuplot homepage*, dostupné z URL: <http://gnuplot.sourceforge.net/>