

# Vážení Země, Cavendishův experiment

Aneta Jíchová  
Gymnázium Plasy  
JichovaAneta@seznam.cz

## Abstrakt

Cílem toho měření bylo přesně určit hmotnost Země, bez použití tabulkových konstant. K tomu jsme potřebovali určit poloměr Země, tíhové zrychlení a gravitační konstantu.

## 1 Úvod

Cavendish v roce 1798 jako první vědců přesně spočítal hmotnost Země. Použil k tomu torzní váhy, s jejichž pomocí změřil gravitační sílu působící mezi olověnými koulemi. Z ní odvodil gravitační konstantu a určil hmotnost Země. Jeho výpočty byly zpřesněny až ve 20. století. V současnosti je nejlepší odhad hmotnosti Země asi 5,973 zettatun (tedy  $5,973 \times 10^{24}$  kg), což se od Cavendishova výpočtu odlišuje jen asi o 1 %.

## 2 Teorie

### 2.1 Gravitační zrychlení

Měření se skládá ze tří částí. Nejdříve je potřeba zjistit gravitační zrychlení. K tomu jsme použili reverzní kyvadlo, u kterého jsme změřili čas kmitu podle toho, jestli bylo zavěšené okolo horního nebo dolního břitu (obr. (1)). Určili jsme závislost periody kyvadla na poloze závaží. Podle toho, pokud kmitá kolem obou břítů stejně, tak se reverzní kyvadlo chová jako matematické. Z toho plyne pro periodu kyvadla:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l \quad (1)$$

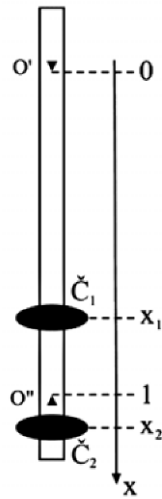
kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $T$  je perioda a  $l$  je vzdálenost mezi břity.

### 2.2 Gravitační konstanta

Jednou z fundamentálních interakcí je interakce gravitační. Gravitační síly mají přitažlivý charakter a působí na hmotné částice. Gravitační síla je ze všech fundamentálních interakcí nejslabší.

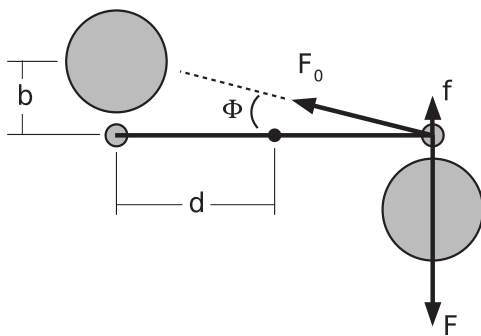
Newton sestavil vzorec pro gravitační zákon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2)$$

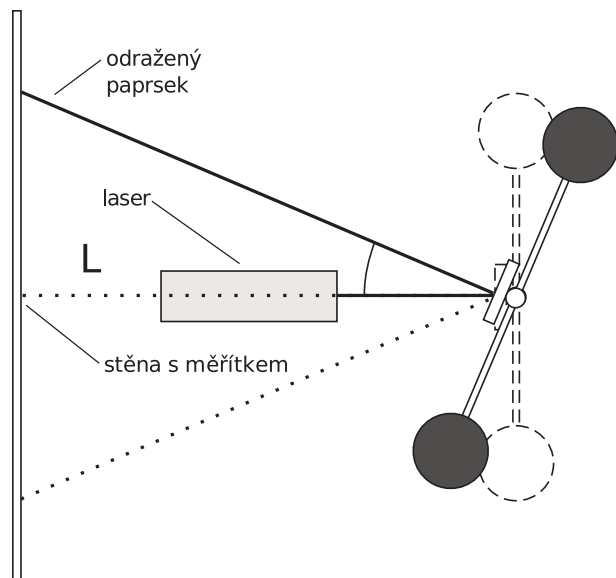


Obrázek 1: Reverzní kyvadlo

kde  $m_1, m_2$  jsou hmotnosti a  $r$  je vzdálenost těles. Při měření se využívá gravitační síly působící mezi dvěma koulemi. Cavendish k jejímu změření použil torzní kyvadlo, jedno z nejcitlivějších mechanických zařízení. K torzi stačí velmi slabá síla, v našem případě působí mezi dvěma koulemi o hmotnostech 1,25 kg a přibližně 50 g. K torznímu lanku je připevněn činka a zrcátko (obr. 3), na které dopadá laserový paprsek. Ten se odráží na protější stěnu a funguje jako optická páka, tzn. velmi zesílí jakoukoli výchylku vah.



Obrázek 2: Působící gravitační síly



Obrázek 3: Schéma experimentu

Když se k malým koulím přiloží těžší koule, vznikne moment dvojice sil

$$2d(F_1 - F_2) = k\Theta, \quad (3)$$

kde  $F_1, F_2$  jsou síly, které jsou na obr. (2),  $k$  je torzní konstanta.

Tento moment způsobí zkroucení lanka a pootočení činky.

$$2d \left( \kappa \frac{m_1 m_2}{b^2} - F_2 \sin \alpha \right) = k\theta \quad (4)$$

po několika úpravách se dostaneme ke vztahu

$$\frac{2dkm_1m_2}{b^2}(1 - \beta) = k\theta \quad (5)$$

kde  $\beta$  je geometrický faktor, který je roven

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Tuhost torzního vlákna  $k$  získáme z periody kmitů

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{k} \quad (7)$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti činky.

Použitím všech předchozích vztahů lze odvodit následující vzorec

$$G = \frac{\pi^2 b^2 S (d^2 + 2/5 r^2)}{T^2 m_2 L d (1 - \beta)} \quad (8)$$

## 2.3 Měření poloměru Země

Poloměr Země jsme určili podle definice metru. Metr je definován jako desetimiliontina vzdálenosti od pólu k rovníku. Z toho lze snadno určit poloměr Země. Poloměr Země jsme určili 6369 km. Rozdíl 0,1% od tabulkové hodnoty 6378 km je způsobený zploštěním Země.

## 3 Měření

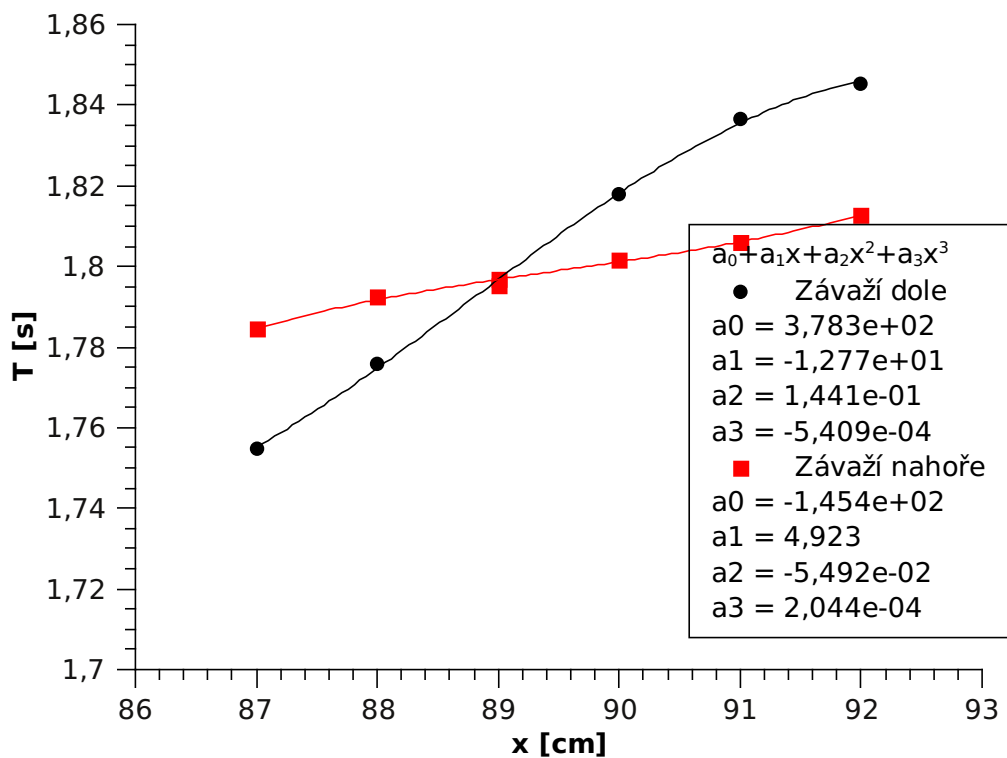
### 3.1 Gravitační zrychlení

Naměřené hodnoty jsou v grafu (4). Po proložení polynomem jsme určili průsečík v bodě 89,01 cm, což odpovídá periodě 1,796 s. Po dosazení do vzorce 1 jsme určili periodu kmitů. Ze znalosti délky kyvadla  $l=803$  mm. Určili jsme gravitační zrychlení  $9,82 \text{ ms}^2$ , což se liší od tabulkové hodnoty 0,1%.

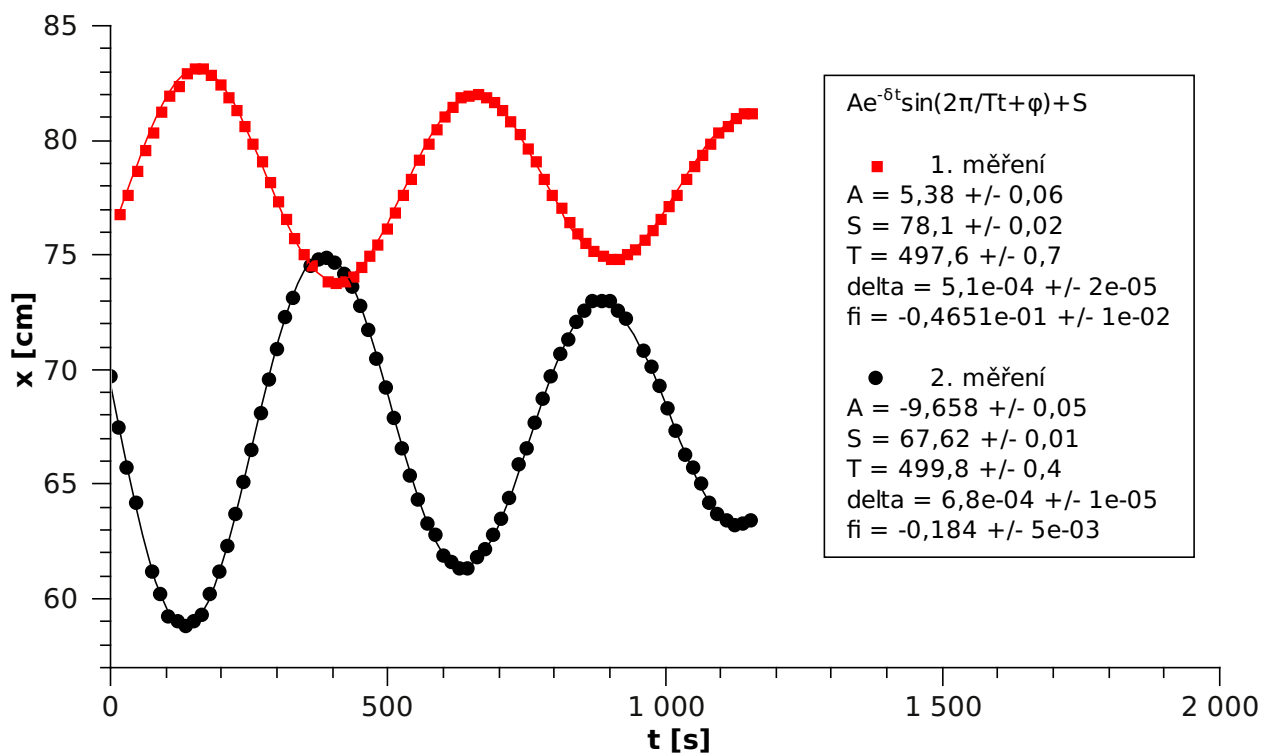
### 3.2 Gravitační konstanta

Schéma zařízení je na obrázku (3). Při měření jsme určovali polohu odrazu laseru odraženého od zrcátka v závislosti na čase. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v grafu (5).

Hodnota  $b$  byla zadána 4,65 cm. Vzdálenost koulí  $d$  v torzních vahách byla 5,0 cm a hmotnosti velkých koulí  $m_2$  jsme určili 1246 g a 1249 g. Vzdálenost přístroje  $L$  od stěny byla zadána 6,00 m. Poloměr malých koulí  $r$  je roven 9,55 mm. Z naměřených hodnot jsme pomocí vzorce 8 určili gravitační konstantu rovnu  $6,63 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Výsledek se od tabulkové hodnoty se liší o 1%.



Obrázek 4: Závislost periody kmitů na poloze závaží



Obrázek 5: Závislost polohy laseru na čase

### 3.3 Vážení Země

Hmotnost Země lze snadno určit porovnáním gravitační a tíhové síly

$$M = \frac{gr^2}{\kappa} \quad (9)$$

Výsledná hmotnost nám vyšla  $6,01 \cdot 10^{24} \text{kg}$ , což se liší od tabulkové hodnoty  $5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$  o 0,7%

## 4 Shrnutí

Poloměr Země jsme určili 6369 km, od tabulkové hodnoty 6378 km se liší o 0,1%. Gravitační zrychlení jsme určili na  $9,82 \text{ms}^2$ , což se liší od tabulkové hodnoty o 0,1%. Gravitační konstantu jsme určili  $6,63 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ , což se od tabulkové hodnoty liší o 1%. Hmotnost Země jsme nakonec určili  $6,01 \cdot 10^{24} \text{kg}$ , což se od tabulkové hodnoty  $5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$  liší o 0,7%.

Měření považuji za velmi úspěšné.

## Poděkování

Chtěla bych moc poděkovat mému supervizorovi Michalu Odstrčilovi.

## Literatura

- [1] Zadání úlohy Cavendishův experiment FJFI
- [2] Zadání úlohy měření tíhového zrychlení na FJFI