Počítačové zobrazování fraktálních množin

J. Bednář*, J. Fábera**, B. Fürstová***

*Gymnázium Děčín
**SPŠ Hronov
***Gymnázium Plasy

*jurij.jurjevic@centrum.cz
**icarosai@seznam.cz
***barborafurstova7@seznam.cz

Abstrakt:

Fraktály jsou nedílnou součástí matematiky. Tato práce definuje pojem fraktál a pojednává o různých typech fraktálních množin, jejich výpočtech a využití v praxi.

1 Úvod

Fraktál je geometricky členitý útvar. Lze jej také definovat jako soběpodobnou množinu, tzn., že objekt je složen z útvarů, které zobrazují původní objekt v menším měřítku. Oproti ostatním geometrickým útvarům, např.: přímce, čtverci, krychli, ... , má neceločíselnou dimenzi – tzv. Hausdorffovu dimenzi.

2 Fraktální geometrie

Je to vědní obor zabývající se zkoumáním fraktálů a jejich vlastností. Fraktály byly známy již ve velice brzké době, avšak počátky fraktální geometrie se datují od počátku 20. století, kdy byl B. B. Mandelbrotem poprvé matematicky definován fraktál. Velký rozvoj začal až v 60. letech 20. století s rozvojem počítačové techniky.

Hausdorffova dimenze

Pomocí Hausdorffovy, též fraktální, dimenze popisujeme složitost (členitost) objektů. Běžné objekty popisujeme pomocí topologické dimenze, kde číslo, kterého nabývá, udává počet rozměrů. U Hausdorffovy dimenze nemusí však toto číslo být celé. Poté platí: Čím je toto číslo větší, tím rychleji se zvyšuje složitost fraktálu s rostoucím měřítkem.

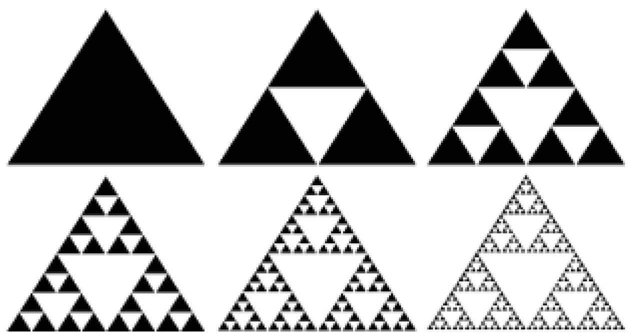
3 Fraktály

Klasické fraktály

Cantorovo diskontinuum

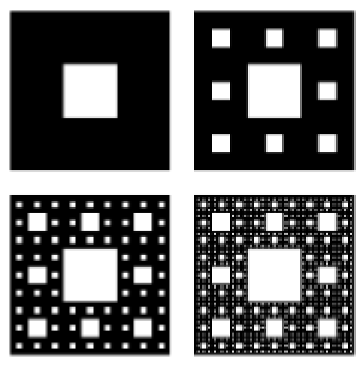
Cantorovo discontinuum, též Cantorova množina, je matematický pojem označující jistou množinu bodů na přímce. Cantorova množina bývá definována následujícím způsobem: Máme úsečku v uzavřeném intervalu [0;1], kterou rozdělíme na 3 části. Prostřední část odejmeme. V následujících krocích budeme celý postup opakovat, vždy vyjmeme prostřední část třetinového intervalu. Cantorovo diskontinuum má Hausdorffovu dimenzi rovnou log2/ log3 = 0,6309.

Obr.1 - Cantorova množina (5 iterací)



Sierpinského trojúhelník

Jedná se o rovnostranný trojúhelník, který rozdělíme středními příčkami na čtyři stejné rovnostranné trojúhelníky. Prostřední trojúhelník poté vyjmeme a postup opakujeme nekonečněkrát. Sierpinského trojúhelník má Hausdorffovu dimenzi rovnou log3/log2 = 1,5850.

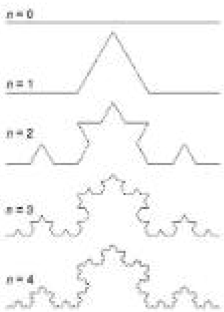


Obr.2 - Sierpinského trojúhelník (5 iterací)

Sierpinského koberec

Zobrazování Sierpinského koberce je založeno na stejném principu jako Sierpinského trojúhelník, avšak trojúhelník je nahrazen čtvercem. Dimenze Sierpinského koberce je rovna podílu log8/log3 = 1,8928.

Obr.3 – Sierpinského koberec (3 iterace)



Kochova křivka (vločka)

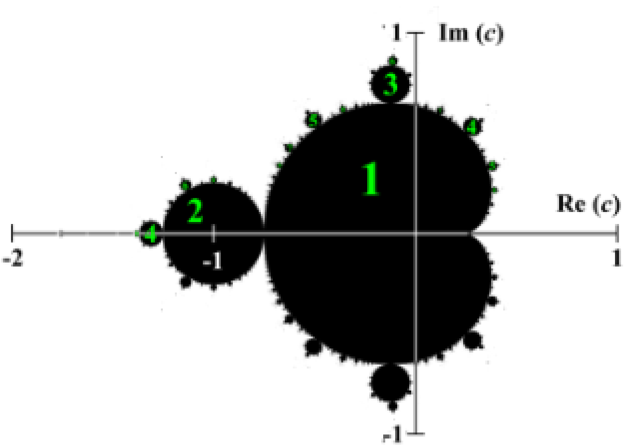
Tato křivka neobsahuje žádné úsečky nebo hladké segmenty, nemá derivaci v žádném bodě. Začneme s úsečkou délky 1, rozdělíme ji na tři části o délce 1/3. Prostřední třetinu nahradíme rovnostranným trojúhelníkem. Stejný postup aplikujeme na všechny čtyři vzniklé úsečky a opakujeme jej nekonečněkrát. Hausdorffova dimenze je zde log4/log3 = 1,2619.

Obr.4 – Kochova křivka (4 iterace)

Fraktály zobrazované v komplexních číslech

Mandelbrotova množina

Mandelbrotova množina je na rozdíl od množin Juliových jen jedna. Je definována jako množina komplexních čísel *c* a posloupnost z_1, z_2, ... z_n je dána rekurzivním předpisem:



$$z_0=0; \qquad z_{n+1}=z_n^{\,2}+c,$$

kde proměnné z_n a c leží v komplexní rovině. Mandelbrotova množina se pak dá definovat následujícím vztahem:

$$M = \{c \in C \mid c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \text{je omezená} \}.$$

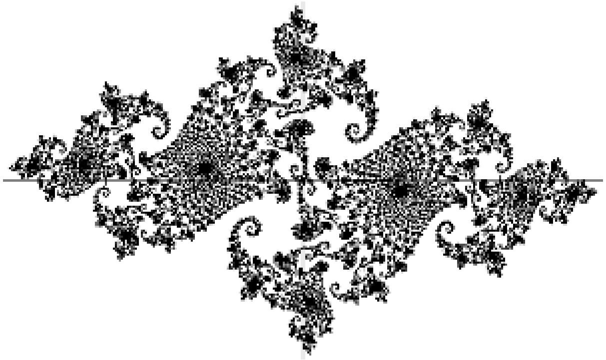
Mandelbrotova množina leží v kruhu se středem v počátku soustavy souřadnic s poloměrem r = 2. Je to jednoduše souvislá množina, což bylo dokázáno v roce 1982 (A. Douady, J. H. Hubbard). Zda je také obloukově souvislá, zůstává hypotézou. Tento fraktál se skládá z nespočetného množství podobjektů, které se vzájemně dotýkají. Mandelbrotova množina je úzce spjata s množinami Juliovými.

Obr.5 - Mandelbrotova množina

Juliovy množiny

Juliovy množiny byly poprvé popsány francouzskými matematiky G. Juliou a P. Fatou. Dnes rozlišujeme dva druhy Juliových množin, souvislé a nesouvislé. Zpravidla platí, pokud bod, který je považován za parametr c Juliovy množiny náleží do Mandelbrotovy množiny na komplexní rovině, bude Juliova množina souvislá. Oproti tomu, pokud bod c nenáleží do Mandelbrotovy množiny, je Juliova množina nesouvislá. Tyto množiny jsou vytvářeny pomocí iterace funkce komplexní paraboly:

$$z_{n+1}=z_n^{\,2}+c,$$



kde proměnné z_n a c leží v komplexní rovině. Počáteční bod z_0 odpovídá pozici bodu v komplexní rovině. Komplexní hodnota c není volena striktně a je pro všechny body obrazce konstantní.
Postupným přepočítáváním zjišťujeme, zda body dané posloupnosti divergují, či nikoliv. Pokud bod nediverguje, patří do množiny. V praxi platí, pokud absolutní hodnota bodu přesáhne 2, bod diverguje a nepatří do množiny. Hausdorffova dimenze Juliových množin je stejně jako u Mandelbrotovy množiny rovna 2 a oproti ní nemusí mít střed v počátku soustavy souřadnic a nemusí být souměrná podle osy.

Obr.7 – Juliovy množiny

4 Fraktálová komprese obrazu

Pomocí metody fraktálové komprese obrazu se objekt rozdělí na segmenty. V obrázku se pomocí transformací snažíme najít soběpodobnost. Poté dostaneme obrázek menšího rozlišení a rovnice popisující transformace. Výhodou je velmi vysoký stupeň komprese, nevýhodou poměrně velká ztrátovost a velmi pomalá komprese.

5 Využití fraktálů v praxi

Fraktály se vyskytují jako součást živých i neživých objektů. Přítomnost fraktálů v přírodě je například u stromů, kapradin, mraků, kamenů, hor, sněhových vloček, říčních systémů či cévních soustav. V poslední době se rozšiřuje přítomnost fraktálů v počítačové grafice a ve výtvarném umění.

6 Shrnutí

Měli jsme možnost proniknout do větší hloubky ve studiu fraktálních množin. Experimentovali jsme s výpočty fraktálních množin v komplexních číslech, konkrétně s Mandelbrotovou množinou a Juliovými množinami. Počítačově jsme zkoumali soběpodobnost a divergenci při různém počtu iterací.

Poděkování

Rádi bychom na tomto místě poděkovali organizátorům Fyzikálního týdne 2009, supervizorovi Ing. Petrovi Paušovi, Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT a všem studentům za příjemnou atmosféru během Fyzikálního týdne 2009.

Reference

[1] P.Pauš. *Počítačové generování fraktálních množin* [online]. Praha: c2001, aktualizováno 2003 [cit. 2009 – 06 – 15]. Dostupné z WWW: < http://geraldine.fjfi.cvut.cz/~pausp/cs/fyztyd>
[2] *Julia set* [online]. New York: c1995 – 1999, aktualizováno 1999 [cit. 2009 – 06 – 15]. Dostupné z WWW: <http://www.fordham.edu/lewis/fferm/fferman.htm>
[3] *Mandelbrot set* [online]. Connelly: c2004, aktualizováno 2006 – 12 – 19. [cit. 2009 – 06 – 15]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotova_množina>
[4] *Kochova křivka* [online]. c2007, aktualizováno 2007 – 05 – 19. [cit. 2009 – 06 – 15]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_k%C5%99ivka>
[5] *Cantorovo diskoninuum* [online]. c2007, aktualizováno 2007 – 01 – 18. [cit. 2009 – 06 – 15]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum>