

Numerické modelování fyzikálních dějů

K. Kolář¹, K. Král², O. Maslikiewicz³, K. Onderková⁴, D. Wagenknecht⁵

¹ Gymnázium, Špitálská 2, Praha 9

² Podkrušnohorské gymnázium, Most

³ Střední průmyslová škola Hronov

⁴ Gymnázium Budějovická, Praha 4

⁵ Gymnázium Říčany, Říčany

¹ k.kolar@email.cz, ² kralkareliv@gmail.com, ³ o.maslik@seznam.cz,

⁴ padawanka@gmail.com, ⁵ d.wag@seznam.cz

Abstrakt:

V současnosti potřebujeme řešit i takové problémy, které jsou analyticky neřešitelné nebo je jejich řešení příliš zdlouhavé, pro takovéto případy používáme přibližné numerické metody. Výhodami numerického modelování jsou rychlost, přesnost (která je často více než dostatečná) a jednoduchost, s kterou se můžeme naučit používat různý numerický software. Tato práce popisuje některé z možností numerických simulací: od jednoduchého tabulkového kalkulátoru až po tvorbu vlastních programů.

1 Úvod

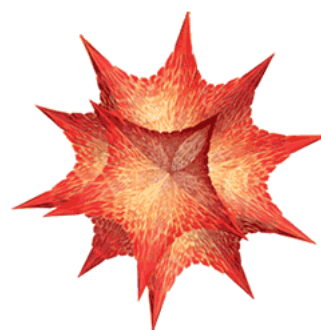
V dnešní počítačové době stále neexistují matematická řešení některých vědeckých problémů, naštěstí s některými nám mohou velice pomoci počítače. Přibližná řešení, která se dnes počítají, se nazývají numerické modelace. Pomocí nich můžeme řešit nejrůznější problémy, určovat tvar balistické křivky, dráhu vesmírné sondy, ale i zobrazovat zajímavé fraktální obrazce. Není přitom nutné dělat mnoho aritmeticky složitých výpočtů v ruce, jen je nutné zadat příkazy a vstupní data do některého z programů k simulacím určených.

2 Programy používané k simulacím a jejich aplikace

2.1 Wolfram Mathematica

Program Wolfram Mathematica je jedním z nejlepších programů pro technické a vědecké výpočty. Umožňuje relativně snadno řešit numericky složité problémy a výsledky umožňuje zobrazit v textové nebo grafické podobě.

Prostředí Wolframu Mathematica se podobá jednoduchému textovému editoru. Pro zadávání vstupů je nutné se naučit speciální příkazy, které se podobají programovacímu jazyku.

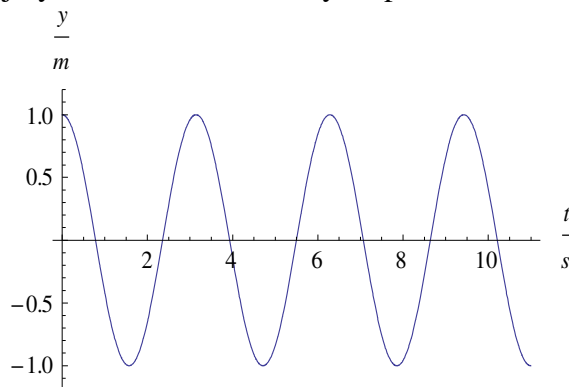


Obr. č. 1: Logo programu[1]

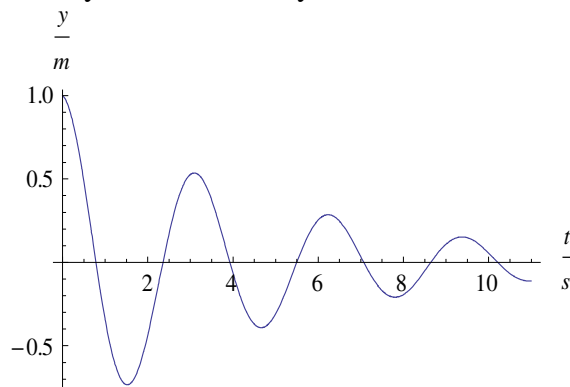
2.1.1 Tlumené kmity

U tlumeného kmitání působí na oscilátor vnější síla, důsledkem čehož dochází ke zmenšování amplitudy. Energie oscilátoru je postupně přenášena do okolí; amplituda se stále zmenšuje, dokud oscilátor nepřestane kmitat.

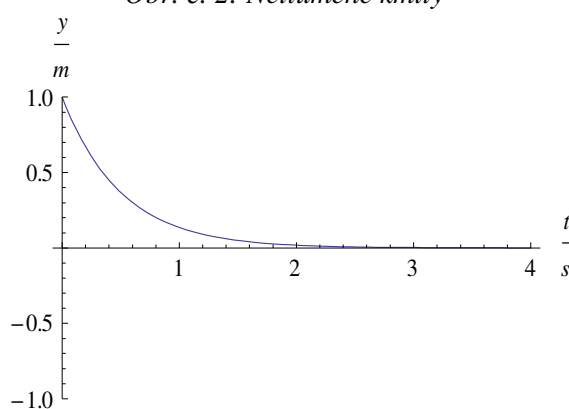
Příkladem oscilátoru je závaží na pružině nebo kyvadlo. Pokud není energie oscilátoru udržována vnějšími silami, přestane fyzikální systém kmitat v důsledku odporu vzduchu a jiných sil, které mohou být např. u matematického kyvadla zanedbány.



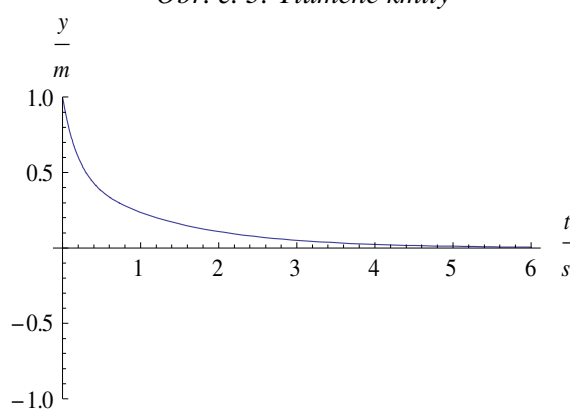
Obr. č. 2: Netlumené kmity



Obr. č. 3: Tlumené kmity



Obr. č. 4: Mezní aperiodické tlumení



Obr. č. 5: Aperiodické tlumení

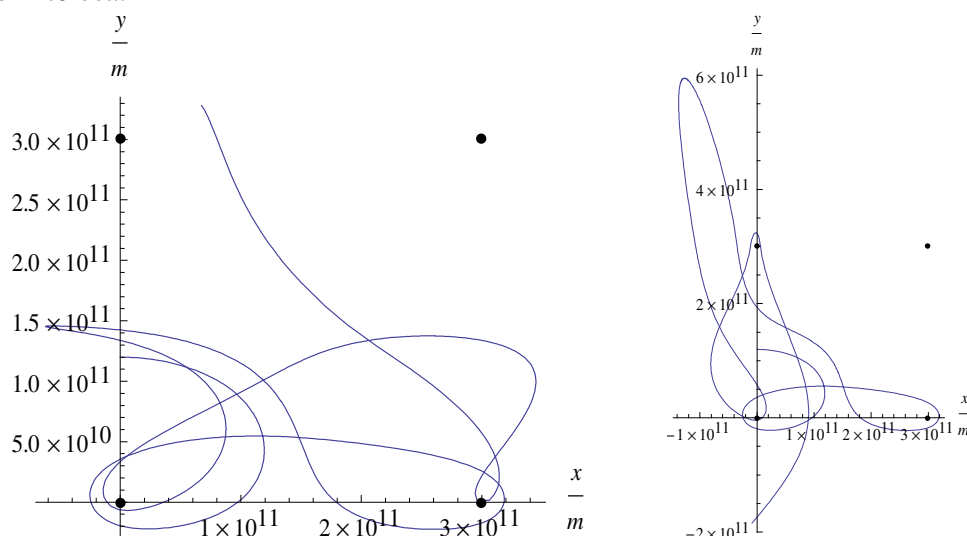
2.1.2 Pohyby v radiálním gravitačním poli

Počítačové simulace se používají v případech, kdy je nutné provést velké, pro člověka nemožné, množství výpočtů. Velmi složité na výpočetní výkon jsou chaotické systémy. Není možné je řešit analyticky a počítačové simulace jsou jediným způsobem, jak zjistit alespoň přibližný vývoj systému.

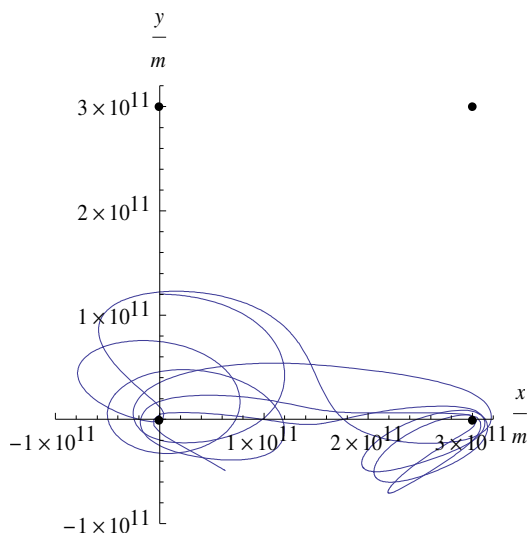
Na obrázku 6, 7 a 8 je zobrazen systém několika těles – jeden z klasických příkladů nelineárního systému. Máme-li například ve vesmíru dvě tělesa, která na sebe působí gravitačně, je možné analyticky popsat chování systému. Po přidání třetího tělesa se ale situace změní. Sice je stále možné vyjádřit síly mezi tělesy gravitačním zákonem, není ale možné chování takového systému analyticky popsat. Jediným způsobem, jak zjistit chování takového systému, je tedy numerická simulace. V ideálním případě bychom pro zjištění přesného vývoje systému museli provést téměř nekonečné množství výpočtů. To sice není možné, také proto se takový systém nazývá chaotickým (respektive deterministicky chaotickým), ale ve většině případů poslouží k relativně přesné simulaci i běžný domácí počítač.

Jedním ze základních znaků chaotického systému je silná závislost na počátečních podmínkách – právě to je demonstrováno na simulacích, jejichž výsledek je na obr. 6, 7 a 8. V simulaci byla umístěna čtyři tělesa hmotnosti Slunce do vrcholů čtverce o straně 2 AU a tato tělesa gravitačně působila na páté těleso (přičemž gravitační působení pátého tělesa na čtyři stacionární bylo zanedbáno). Obě simulace se liší pouze v počátečních podmínkách: poloha pátého tělesa na začátku simulace se liší na čtvrtém desetinném místě. I tak je ale ze

simulací vidět, že tato, na první pohled zanedbatelná odchylka, způsobila velký rozdíl v trajektorii tělesa.



Obr. č. 6 a 7: Ukázka pohybu družice v soustavě 4 Sluncí



Obr. č. 8: Ukázka pohybu družice v soustavě 4 Sluncí

2.2 Famulus

Famulus je program na numerické výpočty. Je obdobou systému Wolfram Mathematica, neobsahuje ale takové množství funkcí, práce s ním je intuitivnější, vstupní kód je podobný programovacímu jazyku Pascal. Je ale určen pro systém MS DOS, což souvisí se starším grafickým rozhraním a problematickým exportem vykreslených simulací.

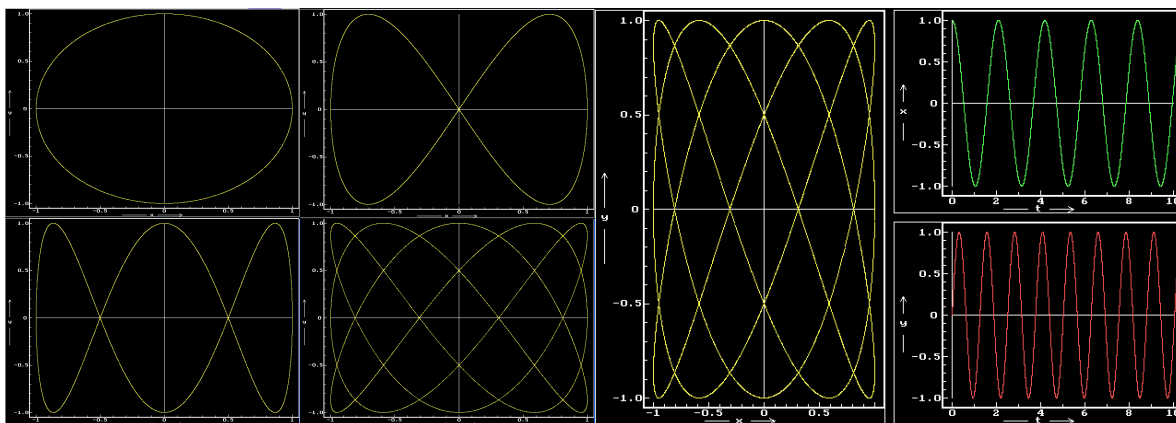
2.2.1 Lissajousovy obrazce

Pokud nějaké těleso kmitá ve více dimenzích, pak jeho trajektorie tvoří Lissajousův obrazec (či Lissajousovu křivku). Pro vzhled výsledné trajektorie je důležitý poměr úhlových frekvencí, ve kterých je pohyb vykonáván.

Parametrický zápis pro kmity probíhající ve dvou na sebe kolmých směrech je:

$$x = x_{\max} \sin(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y = y_{\max} \sin(\omega_y t + \varphi_y)$$

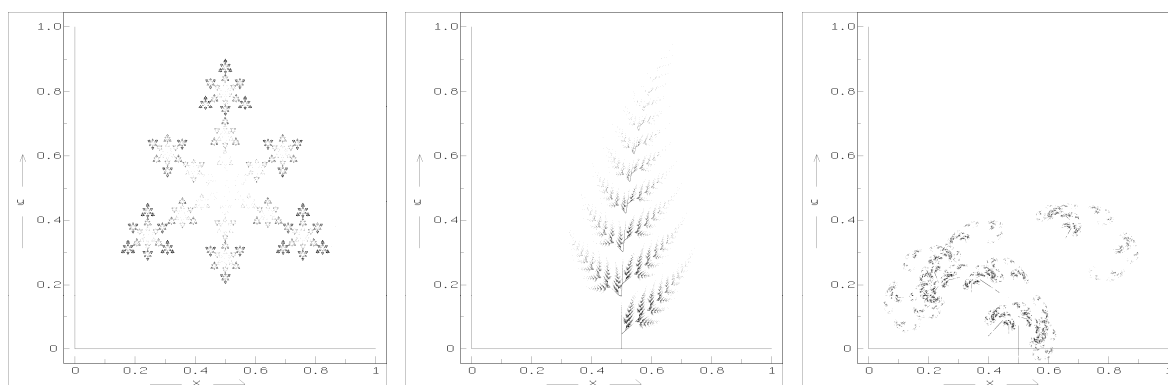


Obr. č. 9: Na levé části jsou Lissajousovy obrazce (pro $\varphi_x = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi_y = 0$) s různými poměry frekvencí kmitů (nahore: vlevo 1:1, vpravo 1:2; dole: vlevo 1:3, vpravo 3:5), v pravé části je opět zobrazena trajektorie poměru 3:5 a grafy závislosti výchylky ve směru osy x a y na čase

2.2.2 Fraktály

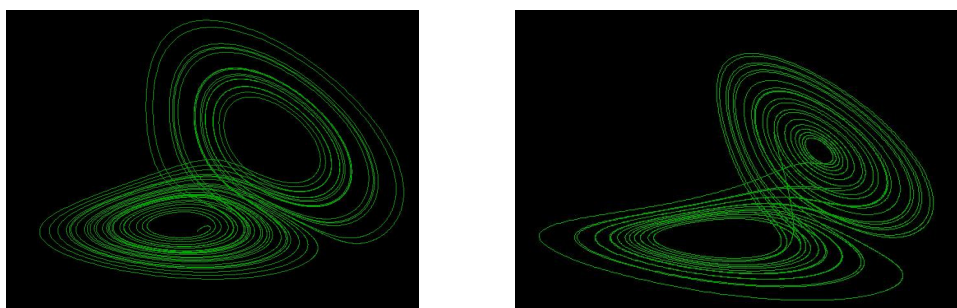
Fraktální množina je matematický soběpodobný objekt, který je přes svoji složitou podobu často popsán relativně jednoduše. K zobrazení většiny fraktálů je potřeba mnoho výpočetních operací, jedná se tedy o systémy vhodné k počítačovým simulacím. Například obrázku 11 je systém iterovaných funkcí označován jako kapradí (fern), jednotlivé simulace se liší v konstantách.

Fraktální množiny nejsou jen pěkné matematické obrazce; ve fyzice se používají k zobrazení vlastností nelineárních systémů.



Obr. č. 10, 11 a 12: Ukázky fraktálů (vločka, kapradí, vlastní výběr konstant)

Lorenzův atraktor je fraktální obrazec pojmenovaný po svém otci, Edwardu Lorenzovi. Vychází z rovnic určených k simulaci atmosféry, na obrázcích 13 a 14 je několik jeho podob lišících se v konstantách v rovnicích.



Obr. č. 13 a 14: Ukázky Lorenzových atraktorů

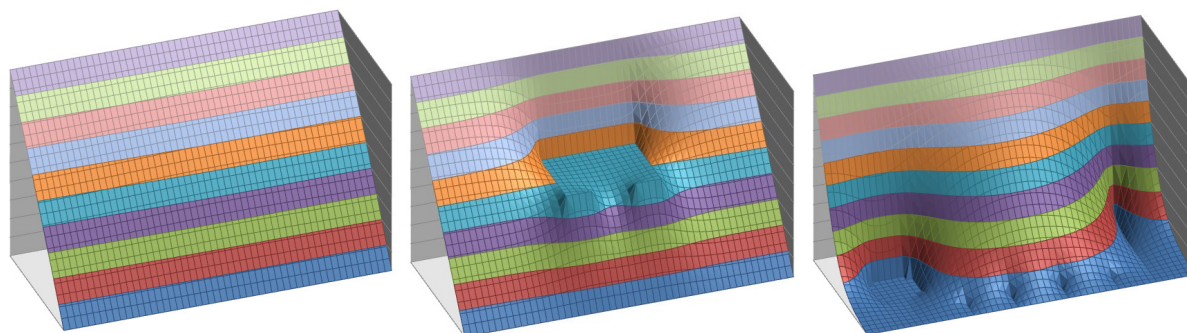
2.3 Excel

Pro některé méně náročné problémy je použitelný i tabulkový editor, například Excel. Takovéto programy nejsou stvořené pro numerické počítání, ale jsou snadno použitelné i bez předchozí přípravy a jejich možnosti jsou poměrně velké.



Obr. č. 15: Logo Excelu[4]

Netriviálním případem použití Excelu může být na vypočítání potenciálu v elektrickém poli. Výpočet pracuje na úplně jednoduchém principu – každá buňka má mít potenciál, který je průměrnou hodnotou 4 okolních buněk (kromě těch, které jsou napevno dané a těch na kraji tabulky). Na obrázku 16 je rozložení potenciálu v situaci, která by mohla být přirovnána k situaci, při bouřce nad rovným polem. Na obrázku 17 je krabice, v jejíž jedné straně je otvor. Na obrázku 18 je přibližná simulace toho, jak by vypadal potenciál v oblasti, kde je strom (vlevo), anténa (vpravo) a 4 lidé (mezi anténou a stromem).

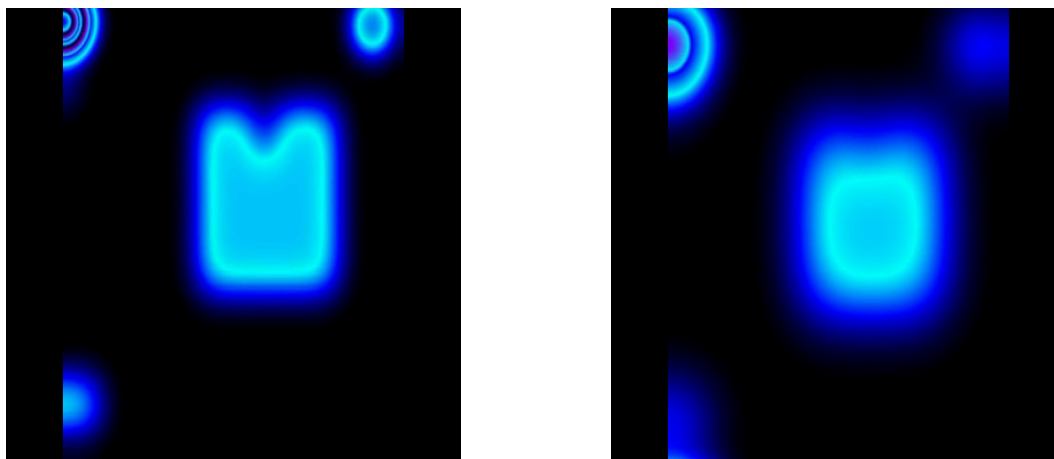


Obr. č. 16, 17 a 18: Ukázky plošných grafů znázorňující potenciál v dané oblasti

2.4 Vytvoření vlastního programu

Programy jako Wolfram Mathematica nebo Famulus sice umožňují simulovat mnoho systému, v praxi je ale často nutné zabývat se i jinými strukturami. V takovém případě je nutné vytvořit jednoúčelový program v některém z programovacích jazyků, například Pascal nebo C++. Výhodou a zároveň i záporem je právě úzká specializace vytvořeného programu. Algoritmy mohou být optimalizované na řešení konkrétního problému a tvůrce má podstatně větší volnost při tvorbě.

Na obrázcích 19 a 20 je ukázka simulace šíření tepla napsaná v jazyce C++ (jedná se o matematickou situaci, nikoliv reálný systém).



Obr. č. 19 a 20: Šíření tepla

3 Shrnutí

V práci jsme se zabývali numerickými simulacemi v programech Wolfram Mathematica a Famulus. Zabývali jsme se systémy, které by bez použití počítačů bylo možné jen těžko zkoumat, ať už se jedná ne nelineární chaotické systémy nebo o jednodušší Lissajousovy obrazce. Je však představeno jen několik možností, jak systémy numericky simulovat. Numerické výpočty je možné provádět i v tabulkovém kalkulátoru nebo jiných programech (např. Scilab). K simulování speciálních systémů je ale také možno napsat speciální program v některém z programovacích jazyků.

V každém případě je ale užíváno výpočetního výkonu počítačů ke zkoumání a popisu systémů, které by bez moderních procesorů bylo možné popsát jen velmi obtížně.

Poděkování

Děkujeme organizátorům, zejména ing. Vojtěchu Svobodovi, a FJFI za pořádání Fyzikálního týdne, děkujeme našemu supervizorovi Ing. Janu Smotlachovi a všem ostatním, kteří se zasloužili o zdárný průběh Fyzikálního týdne.

Reference:

- [1] URL: [HTTP://WWW.WOLFRAM.COM/PRODUCTS/MATHEMATICA/NEWIN6/IMAGES/ROOT/HEADER-SPIKEY2.GIF](http://www.wolfram.com/products/mathematica/newin6/images/root/header-spikey2.gif) [citováno 16. 06. 2009]
- [2] Příspěvatelé Wikipedie, *Tlumené kmitání* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2009, Datum poslední revize 28. 04. 2009, 14:52 UTC, [citováno 16. 06. 2009] <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Tlumen%C3%A9_kmit%C3%A1n%C3%AD&oldid=3901101>
- [3] URL: [HTTP://WWW.ROOT.CZ/CLANKY/FRAKTALY-VE-SKATULKACH/](http://www.root.cz/clanky/fraktaly-ve-skatulkach/) [citováno 16. 6. 2009]
- [4] [HTTP://WWW.CONTRIB.ANDREW.CMU.EDU/~ICLANTON/CCM-WEBSITE/IMAGES/EXCELLOGO.PNG](http://www.contrib.andrew.cmu.edu/~iclanton/ccm-website/images/excellogo.png) [citováno 16. 6. 2009]
- [5] [HTTP://SDRACO.IC.CZ/INDEX.PHP?ART=DELPHI-KONSTRUKCE-FRAKTALU-PODLE-ALGORITMU-IFS](http://sdraco.ic.cz/index.php?art=delphi-konstrukce-fraktalu-podle-algoritmu-ifs) [citováno 16. 6. 2009]