

Počítačové algebraické systémy

Tomáš Pikálek, G. Boskovice
Jiří Nárožný, G. Boskovice
Ondřej Bouchala, G. J. A. Komenského
Jiří Novotný, G. Křenová Brno

Abstrakt

Při počítání fyzikálních úloh se často setkáváme s problémem řešit složité matematické výrazy nebo simulovat některé děje. Pro tyto účely byly vyvinuty počítačové algebraické systémy, jako například Mathematica nebo Maple. Naším cílem je demonstrace síly těchto programů a jejich krátké přiblížení.

1 Úvod

Počítačové algebraické systémy (CAS¹) se vyvinuly ze specializovaných matematických programových balíčků pro superpočítače, dnes je však najdeme na osobních počítačích PC a dokonce i na některých typech vědeckých kalkulátorů.

Začátečník může CAS programy používat jako chytřejší kalkulačku nebo jako nástroj na tvorbu 2D i 3D grafů, pokročilejší uživatel využije nástroje pro práci s maticemi, nesčetné množství funkcí pro numerické i symbolické výpočty nebo modelování fyzikálních úloh.

Počítačové algebraické systémy se dělí podle použití:

- pro numerické výpočty – komerční Matlab a dále Scilan nebo Octave, které jsou k dispozici zdarma,
- pro symbolické výpočty – komerční Mathematica a Maple, ze volně šiřitelných programů např. Maxima. Tyto programy však umí i výpočty numerické. Jejich velkou výhodou je však možnost řešit numericky náročné úlohy obecně.

1.1 Historie

První CAS se začaly objevovat v 70. Velkým průkopníkem byl pozdější laureát Nobelovy ceny Martin Veltman, který v roce 1963 naprogramoval první program pro symbolické výpočty, především ve fyzice vysokých energií.

V roce 1987 společnost Hewlett-Packard představila první kapesní kalkulačku s CAS. Ta umožňovala mimo jiné i symbolickou integraci, počítání s algebraickými výrazy a řešení algebraických rovnic. Ani společnost Texas Instruments nezůstala pozadu a zanedlouho také představila vlastní kalkulačku s CAS.

První populární počítačové algebraické systémy byly muMATH, Reduce, Derive, Macsyma a volně šiřitelná Maxima

Dnes je na trhu mnoho produktů, které jsou daleko vyspělejší a komplexnější, např. Maple, Mathematica a také Maxima, která je narozdíl od obou předchozích zdarma.

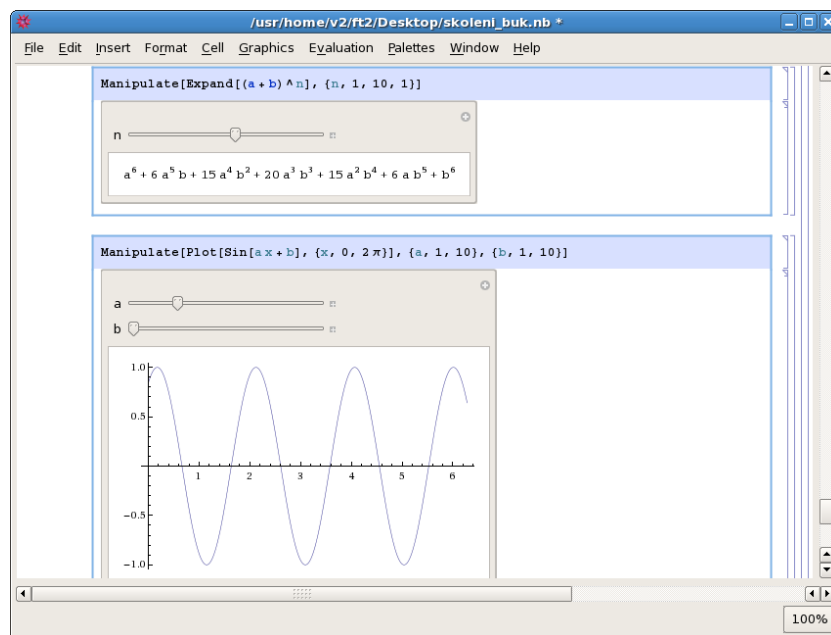
¹Computer Algebra System

2 Představení některých programů

Asi nejnámější a nejpoužívanější počítačové algebraické systémy jsou Mathematica a Maple. Právě tyto dva zajímavé programy zde blíže představíme.

2.1 Mathematica

Mathematica je počítačový program široce používaný ve vědeckých, technických a matematických kruzích. Program byl původně vytvořen Stephenem Wolframem a následně vyvíjen týmem matematiků a programátorů. Je prodáván firmou Wolfram Research se sídlem v Champaign, Illinois.



Obrázek 1: Mathematica

Použili jsme verzi Mathematica 7.0.1 na distribuci Linuxu CentOS 5.3.

Program Mathematica je rozdělen do dvou částí – jádra a frontendu. Jádro interpretuje výrazy a vrací výsledky. Frontend poskytuje nad jádrem grafické uživatelské rozhraní, ve kterém výsledky vhodně zobrazuje, což je pro běžnou práci pohodlnější.

Nejnovější Mathematica s číslem 7 je dostupná pro mnoho platforem – Microsoft Windows, GNU/Linux, Mac OS X a Sun Solaris.

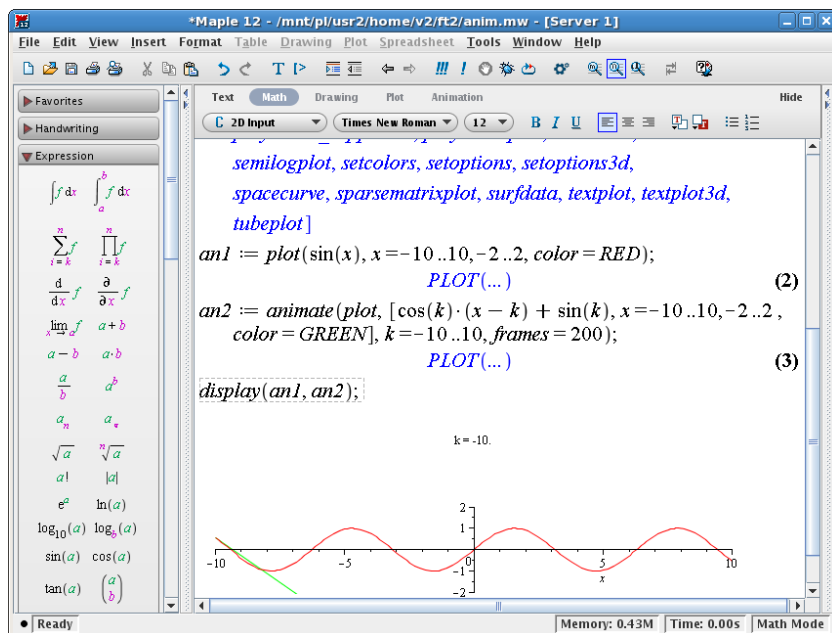
Práce s Mathematicou je velmi jednoduchá. Velkou pomůckou pro začínající i pokročilé uživatele je Documentation Center, ve kterém jsou všechny příkazy podrobně vysvětleny včetně praktických příkladů.

2.2 Maple

Dalším rozšířeným CAS je Maple. Ten byl vyvinut v roce 1980 na univerzitě ve Waterloo v Kanadě. Od roku 1988 je dále vyvíjen společností Waterloo Maple, známou též jako Maplesoft.

Maple poskytuje velké množství funkcí pro vysvětlení základních i náročnějších matematických pojmů. Také obsahuje i pokročilé nástroje pro tvorbu a vývoj grafických uživatelských rozhraní, kdy uživatel již nemusí znát téměř žádné příkazy systému. Samozřejmostí je také bohatá nápověda ke všem funkcím.

Tradice Mapelu je založena na standardním grafickém rozhraní a klasických zápisnicích. Toto grafické rozhraní je velmi dobře použitelné a přehledné, ale vyžaduje poměrně hlubokou znalost programovacího jazyka systému Maple.



Obrázek 2: Maple

Stejně jako Mathematica, i Maple běží na všech nejpoužívanějších operačních systémech – Microsoft Windows, GNU/Linux, Mac OS X a Sun Solaris.

Nejnovější verze je nyní Maple 13, vydaná v dubnu 2009. My používali starší verzi Maple 12.0, opět na distribuci CentOS 5.3.

3 Praktické příklady

Všechny tyto jednoduché praktické příklady jsou napsány v programu Mathematica.

Obecné řešení kvadratické rovnice

```
In[11]:= Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]
Out[11]= {{x -> (-b - sqrt(b^2 - 4 a c)) / (2 a)}, {x -> (-b + sqrt(b^2 - 4 a c)) / (2 a)}}
```

Vyřešení soustavy rovnic

```
In[1]:= Solve[{x^2 == y, x + y == 2}]
Out[1]= {{y -> 1, x -> 1}, {y -> 4, x -> -2}}
```

Zjednodušení výrazu

```
In[8]:= Simplify[36 a b^2 + 8 b^3 + 27 a^3 + 54 a^2 b + 12 b^2 c^2 + 9 a c^4 + 27 a^2 c^2 + 36 a b c^2 + 6 b c^4 + c^6]
Out[8]= (3 a + 2 b + c^2)^3
```

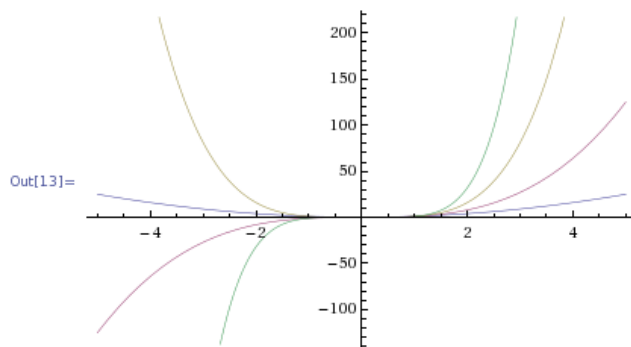
Derivace

```
In[24]:= D[(x+1)/x]^x, x]
```

```
Out[24]= (1+x/x)^x (x^2 (1/x - 1/x^2)/(1+x) + Log[1+x/x])
```

Vykreslení grafů funkcí

```
In[13]:= Plot[{x^2, x^3, x^4, x^5}, {x, -5, 5}]
```

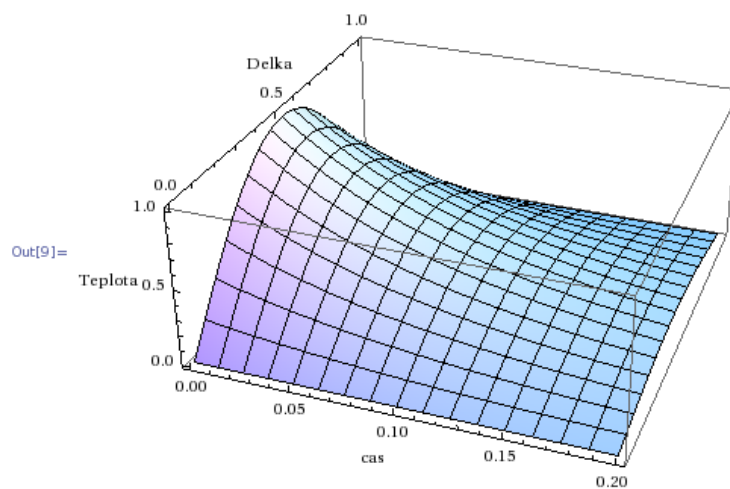


Nestacionární vedení tepla v jednorozměrném tělese

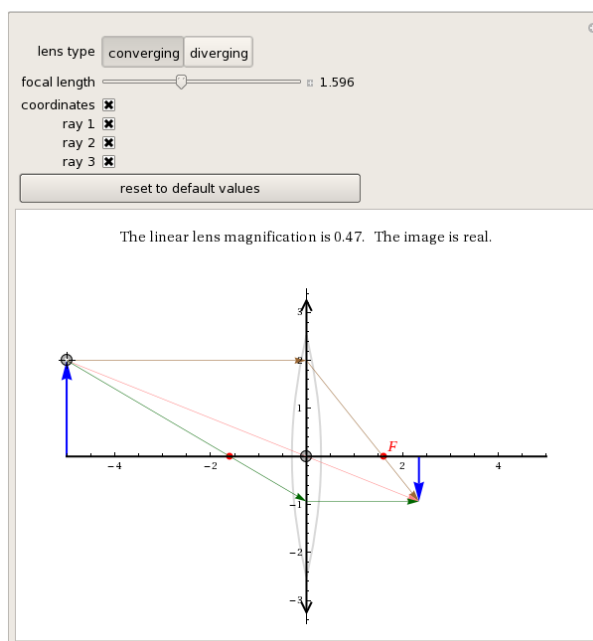
```
In[8]:= sol = NDSolve[{D[u[x, t], t] == D[u[x, t], x, x],  
u[x, 0] == Sin[Pi x], u[0, t] == 0,  
u[1, t] == 0}, u, {x, 0, 1}, {t, 0, 0.2}]
```

```
In[6]:= Options[Plot3D]
```

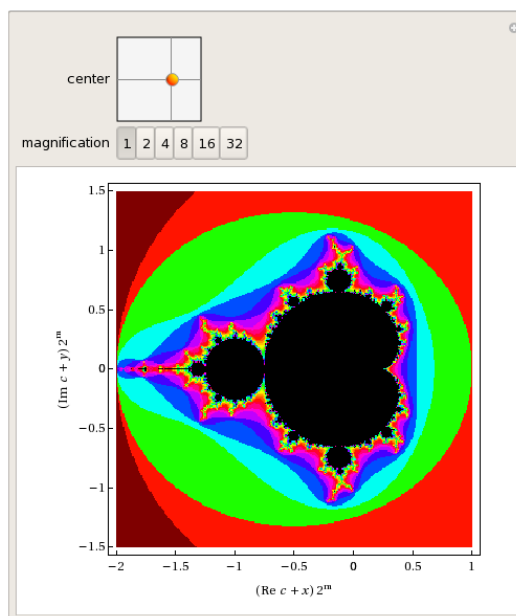
```
In[9]:= p1 = Plot3D[Evaluate[u[x, t] /. sol[[1]]], {t, 0, 0.2},  
{x, 0, 1}, AxesLabel -> {"cas", "Delka", "Teplota"}, PlotRange -> All]
```



Simulace optické čočky



Vykreslení fraktálu



4 Závěr

Počítačové algebraické systémy jsou skvělou pomůckou pro řešení matematických a fyzikálních úloh. Jsou tak vhodným nástrojem nejen pro vědce a odborníky, ale i pro studenty vysokých a středních škol, kterým ulehčí mnoho práce.

Ovládání programů Mathematica i Maple je velmi jednoduché a intuitivní. Pomocí několika příkazů je možné vyřešit spoustu věcí, které by bez použití CAS trvaly mnohem déle. Velkou výhodou jsou také podrobné manuály obsažené v obou programech.

Poděkování

Za celý tým tímto děkujeme především našemu supervizorovi Dr. Ing. Milanu Šiňorovi za obětavost a trpělivost. Dále pořadatelům Fyzikálního týdne, zvláště pak Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc., a v neposlední řadě Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze.

Literatura

- [1] *Wikipedia: Computer algebra system*
http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra_system
- [2] *Wikipedia: Mathematica*
<http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematica>
- [3] *Wikipedia: Maple (software)*
[http://en.wikipedia.org/wiki/Maple_\(software\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Maple_(software))
- [4] *Hřebíček, Jiří: Systémy počítačové algebry*
<http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple/cas>
- [5] *Wolfram, S.: The Mathematica Book*, 1999, Wolfram Media Inc., ISBN 1-57955-004-5
- [6] *Wickham-Jones, T.: Mathematica Graphics*, 1994, TELOS, ISBN 0-387-94047
- [7] *Maeder, R. E.: Programming in Mathematica*, 1991, Addison-Wesley Publishing Co., ISBN 0-201-54877
- [8] *Gaylord, R. J., Kamin, S. N., Wellin, P. R.: Introduction to Programming with Mathematica*, TELOS, ISBN 0-387-94048-0
- [9] *Waterloo Maple Inc.: Maple 8 - Learning Guide*, 2002, Waterloo Maple, ISBN 1-894511-26-3

Další zdroje

- [1] Wolfram Demonstrations Project: <http://demonstrations.wolfram.com>

Odkazy

- [1] Wolfram Mathematica: <http://www.wolfram.com>, <http://www.mathematica.cz>
- [2] Maple: <http://www.maplesoft.com>
- [3] Maxima: <http://maxima.sourceforge.net>