

Cavendishův experiment

O. Vicenec – Gymnázium Šumperk, ondrasek.vic@seznam.cz

J. Veverka – Gymnázium Jiřího Ortena, Kutná Hora,
j.vev@centrum.cz

F. Falta – Gymnázium Trutnov, fffrantik@seznam.cz

T. Jakoubek – FJFI ČVUT v Praze, tomas.jakoubek@cern.ch

Abstrakt:

Cílem Cavendishova experimentu je určení gravitační konstanty pomocí torzních vah, což lze využít k poměrně přesnému určení hmotnosti libovolného tělesa, v našem případě Země.

1 Úvod

H. Cavendish v roce 1798 poprvé určil relativně přesně hmotnost Země. Vycházel z Newtonova gravitačního zákona ve známém tvaru $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$. Z této rovnice bylo potřeba zjistit velikost konstanty G , která nám po dosazení do vztahu $M_Z = g \frac{R^2}{G}$, dovolí stanovit hmotnost Země. Cavendishovi se podařilo měření tak přesně, že bylo překonáno až o 100 let později. Odchylka od dnešního nejpřesnějšího měření činila pouhé 1%.

2 Popis Cavendishova experimentu

Tak vysoká míra přesnosti, které bylo dosaženo, byla umožněna díky použitím torzních vah, skládajících se ze dvou malých olovených kuliček na ose se zrcátkem, které jsou zavěšeny na torzním vlákně. Soustava je izolovaná od okolního prostředí, aby se zredukovalo co nejvíce vnějších činitelů, které by mohli měření ovlivnit. Tato soustava je také uzemněná, protože statická elektřina je u takto malých hmotností mnohonásobně větší než gravitační síla, tak by se lehce mohlo stát to, že bez uzemnění by se koule „nalepily“ díky statické elektřině na konstrukci. Součástí experimentu jsou dvě velké olovené koule o hmotnosti 1,25 kg. Přiblížením větších koulí ke koulím menším dojde k rozkmitání kyvadla. Laserový paprsek svítící na zrcátko umístěné na torzním vlákně je odrážen na stínítko ve vzdálenosti 626 cm(±1cm), na kterém lze vychýlení vlákna pozorovat s mnohem vyšší přesností. Průběh

výchylky v čase můžeme nafitovat např. pomocí programu Gnuplot. Z parametrů fitu a naměřených vzdáleností můžeme pomocí vztahu

$$G = \frac{\pi^2 b^2 S}{T^2 m_2 L} \frac{d^2 + \frac{2}{5} r^2}{d(1 - \beta)}$$

určit gravitační konstantu.



Obr. 1: Fotografie torzních vah

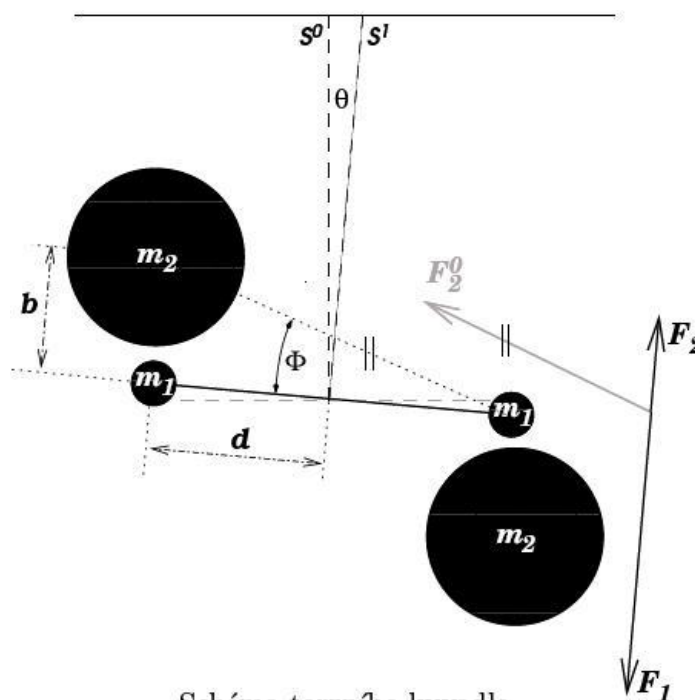


Schéma torzního kyvadla

Obr. 2: Schéma torzního kyvadla – pohled shora

3 Odvození vztahu pro výpočet

$$\begin{aligned} \tau_f &= -\tau_t \\ 2d(F_1 - F_2) &= k\theta \\ 2d \left(G \frac{m_1 m_2}{b^2} - \underbrace{F_2^0}_{G \frac{m_1 m_2}{b^2 + 4d^2}} \sin \Phi \right) &= k\theta \\ 2dGm_1 m_2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2 + 4d^2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} \right) &= k\theta \\ 2dGm_1 m_2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(b^2 + 4d^2)^{3/2}} \right) &= k\theta \\ \frac{2dGm_1 m_2}{b^2} (1 - \beta) &= k\theta \\ \beta &= \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

τ_t, τ_f – momenty sil ve spojených koulích

d – polovina vzdálenosti středů menších koulí

F_1, F_2 – síly působící na koule

m_2, m_1 – hmotnosti koulí

b – vzdálenost středů menší a větší koule

G – gravitační konstanta

k – torzní konstanta

θ – úhel vychýlení zrcátka

Po vyjádření konstanty k a úhlu θ , dosazení a upravení, dostáváme finální vztah, kde jsou obsaženy parametry aparatury – vzdálenosti, hmotnost větší koule (menší nepotřebujeme - v rovnici se vykrátí), poloměry koulí a vzdálenost aparatury od stínítka, a parametry nařizovaného průběhu kmitů – periodu kmitání a rozdíl středních hodnot.

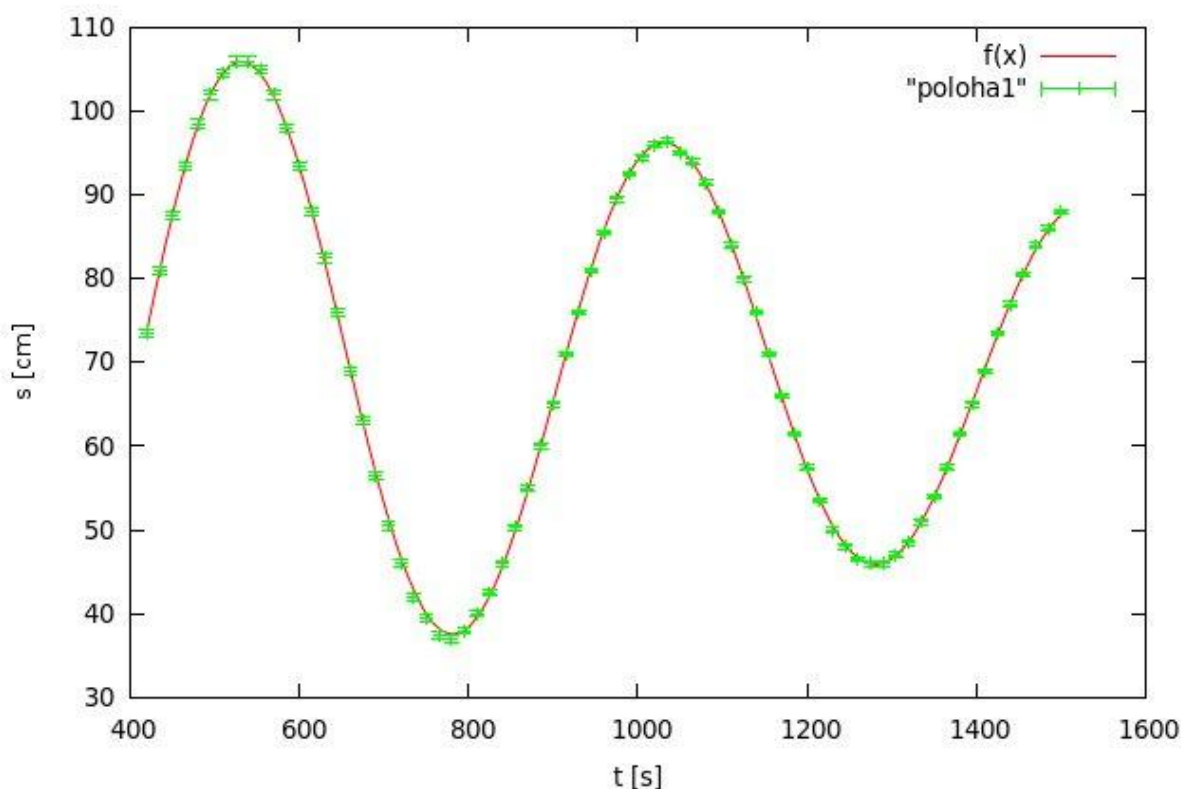
$$G = \frac{\pi^2 b^2 S}{T^2 m_2 L} \frac{d^2 + \frac{2}{5} r^2}{d(1 - \beta)}$$

4 Výsledky

Naměřené průběhy výchylek kyvadla a jejich nařizování funkcí

$$f(t) = Ae^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) + S^{1(2)}$$

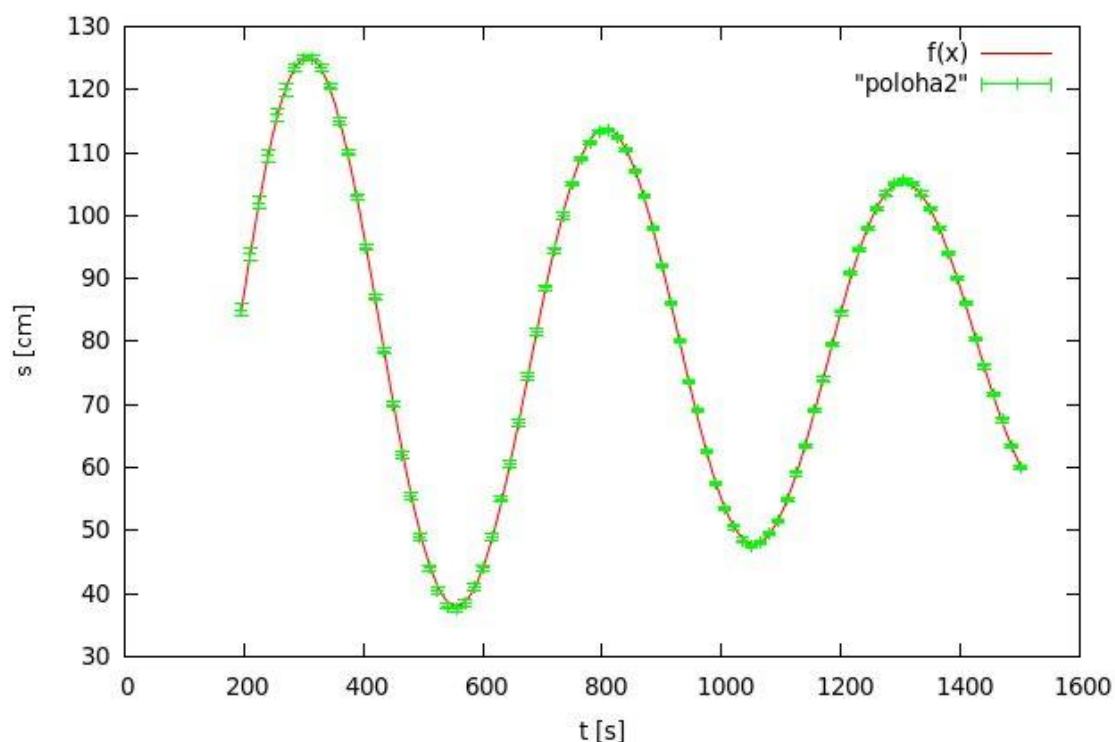
je na grafech 1 a 2.



Graf 1: Graf funkce v první poloze

První poloha:

a	=	51,0347 +/-	0,3521 (0.6898%)
d	=	0,00061129 +/-	6.963e-06 (1.139%)
T	=	499,471 +/-	0,2578 (0.05161%)
fi	=	1,11936 +/-	0,006528 (0.5832%)
s	=	69,1389 +/-	0,03809 (0.05509%)



Graf 2: Graf funkce v druhé poloze

Druhá poloha:

a	=	55,4303 +/-	0,2554 (0.4608%)
d	=	0,00055757 +/-	5.006e-06 (0.8979%)
T	=	498,55 +/-	0,1973 (0.03958%)
fi	=	-2,33699 +/-	0,004864 (0.2081%)
s	=	78,544 +/-	0,04011 (0.05107%)

Po dosazení hodnot do vztahu

$$G = \frac{\pi^2 b^2 S}{T^2 m_2 L} \frac{d^2 + \frac{2}{5} r^2}{d(1 - \beta)}$$

jsme získali hodnotu gravitační konstanty $5,97 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Tabulková hodnota je $6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Odchylka činí 9,76%.

5 Diskuse

Měření se nám povedlo relativně přesně, i když odchylka 9,76% je téměř dvojnásobná než tolerovatelných 5%. Odchylky jsou způsobeny lidským faktorem, citlivostí měřících přístrojů a zaokrouhlením výsledku.

6 Reference

[1] Zadání Cavendishova experimentu,

<http://rumcajs.fifi.cvut.cz/fyzport/FundKonst/Cavendish/cav.pdf>, [cit. 15. 06. 2010]