

Logické rovnice

Jan Baborák, Gymnázium Česká Lípa, janbaborak@seznam.cz

Eva Svobodová, Karlínské gymnázium, evasvobo@gmail.com

Dominik Tělupil, Gymnázium Brno, dtelupil@gmail.com

Abstrakt:

Základem našeho miniprojektu je počítání pomocí Booleovy algebry a jejích zákonů, které jsme se snažili dokázat. Poté jsme se naučili vytvářet soustavy logických rovnic a převádět je do rozšířeného Hornova tvaru. Vyřešili jsme pár logických hádanek a poté hledali jejich řešení pomocí soustavy lineárních rovnic. Naučili jsme se využívat k operacím s rovnicemi nástroj Řešitel v Excelu. Nakonec jsme aplikovali naše nově nabyté znalosti k řešení jednoduchých úloh.

1 Úvod

Cílem našeho miniprojektu bylo se seznámit s možnými postupy při řešení soustav logických rovnic, zejména pak metodou převodu na soustavy lineárních nerovnic. Touto metodou se lze dopátrat správného řešení (nejen logických úloh typu sudoku či pokrývacích úloh) jinak než pouhým odhadem či intuicí. Jedná se taktéž o předstupeň ke studiu mnohých oborů, jež ve své praxi využívají pokročilejší logiky – např. práce s umělými inteligencemi. Dalším cílem bylo odhalit možnosti nástroje Řešitel v Excelu, který významně usnadňuje práci s rovnicemi a nerovnicemi.

2 Soustavy logických rovnic

Logická rovnice je taková rovnice, která vznikne převedením rovnosti funkcí $f(x)$, $g(x)$ na pravidlo jejich ekvivalence. Neboli

$$f(x) = g(x)$$

$$R : f(x) \Leftrightarrow g(x)$$

Sestavíme-li soustavu těchto rovnic, lze je obecně charakterizovat takto :

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad x \in \{0,1\}^m$$

...

$$f_m(x) = g_m(x)$$

Této soustavě odpovídá 2^m pravidel.

$$R_1 : f_1 \Rightarrow g_1 \qquad R_{m+1} : g_1 \Rightarrow f_1$$

...

$$R_m : f_m \Rightarrow g_m \qquad R_{2m} : g_m \Rightarrow f_m$$

3 Báze znalostí

Báze znalostí je soustava logických rovnic v Hornově tvaru.

$$R: A \Rightarrow C$$

Pravidlo v Hornově tvaru je ve tvaru:

$$R: \left(\bigwedge_{j=1}^m a_j \right) \Rightarrow \left(\bigvee_{j=1}^n c_j \right),$$

kde $\left(\bigwedge_{j=1}^m a_j \right)$ je součin antecedentů (příčin) a $\left(\bigvee_{j=1}^n c_j \right)$ suma konsekventů (následků), tedy: Za předpokladu, že platí všechny antecedenty, tak platí alespoň jeden z konsekventů.

Každou bázi znalostí je možné zapsat ve tvaru $R = R_1 \wedge R_2 \wedge \dots \wedge R_m$, kde každé z pravidel je v rozšířeném Hornově tvaru

Je-li seznam příčin prázdný, nahrazujeme jej konstantou 1. Je-li prázdný seznam následků, nahrazujeme jej konstantou 0.

Výhodou Hornova tvaru je, že se zde vůbec nevyskytuje operátor negace.

Z jedné rovnice je občas možné vygenerovat více než jedno pravidlo, souborem pravidel mohou také vznikat nová pravidla.

$$m = 0: \bigwedge_{j=1}^m a_j \equiv 1$$

$$n = 0: \bigvee_{j=1}^n c_j \equiv 0$$

$$R = \bigwedge_{k=1}^N R_k$$

4 Konverze na soustavu nerovnic

$$\sum_{j=1}^m a_j - \sum_{j=1}^n c_j \leq m - 1$$

Bázi pravidel v Hornově tvaru je výhodné konvertovat na soustavu lineárních nerovnic, kterých se využívá k jednoduššímu řešení soustavy logických rovnic.

$$R: \left(\bigwedge_{j=1}^m a_j \right) \Rightarrow \left(\bigvee_{j=1}^n c_j \right)$$

Nejprve celé pravidlo znegujeme, díky čemuž se dostaneme do tvaru

$$\sum_{j=1}^m a_j + \sum_{j=1}^n (1 - c_j) \leq m + n - 1$$

Jelikož pravdivost původního pravidla má být jedna, tak pravdivost jeho negace je nulová – vyžadujeme, aby neplatila možnost, že jsou splněny všechny příčiny a není splněn ani jeden následek.

$$\neg R : \left(\bigwedge_{j=1}^m a_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^n \neg c_j \right) = 0$$

Vše si převedeme na algebraickou nerovnici ,

kde závorkou (1-c) značíme pravdivostní hodnotu negace původního konsekventu. Od obou stran nerovnice odečteme n a dostaneme finální nerovnici

5 Aplikace

Nabyté znalosti jsme aplikovali na několika jednoduchých příkladech, které by mohly být řešeny pouhou úvahou.

Příklad 1 : Poctivci a padouši

K demonstraci nevýhodnosti řešení logické úlohy systémem úprav logických rovnic jsem využil úlohu z jedné neznámějších knih popularizujících logiku, z knihy *Jak se jmenuje tahle knížka?* od Raymonda Smullyana.

Zadání:

Předpokládejme, že každý obyvatel je buď poctivcem, který mluví vždy pravdu, nebo padouchem, který vždy lže.

Předpokládejme, že máme tři obyvatele ostrova, A, B, C.

A a B prohlásí:

A: Všichni jsme padouši.

B: Právě jeden z nás je padouch.

Dá se určit, co je B? Dá se určit, co je C?

Řešení:

a) soustavou rovnic

$$R_1 : A \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C =$$

$$= (\neg A \wedge ((B \wedge C)(\neg B \vee C)(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C))) =$$

$$= (\neg A \wedge ((B \wedge C)(\neg B \vee C)(B \vee \neg C)))$$

$$R_2 : B \Leftrightarrow ((A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)) =$$

$$= \neg B \vee (B \wedge ((A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)))$$

$$R_1 \wedge R_2 : (\neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)) \wedge (\neg A \wedge ((B \wedge C) \wedge (\neg B \wedge C) \wedge (B \wedge \neg C))) =$$

$$= (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

Ze závěrečného řádku jasně vyplývá, že A – za předpokladu, že jsou všechny podmínky splněny – vždy lže, C mluví vždy pravdu a u B se o jeho pravdomluvnosti nedá rozhodnout.

Řešení pomocí soustavy rovnic svou náročností zaostává za řešením úlohy pouhým selským rozumem:

b) Předpokládejme, že A mluví pravdu. Pak lže každý z trojice A, B, C. Zejména tedy i A, čímž se dostáváme ke sporu. Osoba A tedy nutně lže. Mluví-li B pravdu, pak lže právě jeden z trojice A, B, C – lže tedy pouze A. B, C mluví pravdu. Lže-li B, pak lže jiný počet osob než právě jedna, víme ale že A nutně lže, B lže a nelžou všichni, tedy C je poctivec.

Zjistili jsme tedy, že A lže vždy, C vždy mluví pravdu a u B se jeho pravdomluvnost nedá určit.

Příklad 2 : Pokrývání křížky

Zadáním příkladu bylo pokrýt pole 3x3 co nejmenším počtem desek ve tvaru kříže.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Nejprve je třeba zjistit, kdy je každé pole zakryté. Sepíšeme devět výroků pro každé pole vždy podle toho, v jakém poli je střed kříže. Těchto devět výroků poté převedeme do Hornova tvaru. Z Hornova tvaru je převedeme na lineární nerovnice, abychom je v tomto tvaru mohli zadat do počítačového programu.

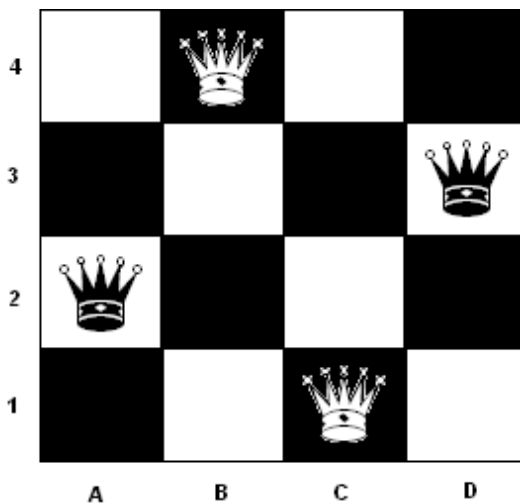
Logický zápis	Hornův tvar	Logické nerovnice
$A \wedge B \wedge D$	$1 \Rightarrow (A+B+D)$	$A+B+D \geq 1$
$A \wedge B \wedge C \wedge E$	$1 \Rightarrow (A+B+C+E)$	$A+B+C+E \geq 1$
$B \wedge C \wedge F$	$1 \Rightarrow (B+C+F)$	$B+C+F \geq 1$
$A \wedge D \wedge E \wedge G$	$1 \Rightarrow (A+D+E+G)$	$A+D+E+G \geq 1$
$B \wedge D \wedge E \wedge F \wedge H$	$1 \Rightarrow (B+D+E+F+H)$	$B+D+E+F+H \geq 1$
$C \wedge E \wedge F \wedge I$	$1 \Rightarrow (C+E+F+I)$	$C+E+F+I \geq 1$
$D \wedge G \wedge H$	$1 \Rightarrow (D+G+H)$	$D+G+H \geq 1$
$E \wedge G \wedge I$	$1 \Rightarrow (E+G+I)$	$E+G+I \geq 1$
$F \wedge H \wedge I$	$1 \Rightarrow (F+H+I)$	$F+H+I \geq 1$

V Excelu do sloupce vložíme všech devět polí s hodnotou 1 pro pravdivý výrok (=deska je pokrytá). Uděláme druhý sloupec, kam vložíme nerovnice a pomocí nástroje Řešitel nastavíme

podmínky. Abychom zjistili výsledek – nejmenší počet desek, musíme sečíst všech devět hodnot a v Řešiteli zadat tuto hodnotu na minimální. Dostaneme nejmenší možný počet desek a ve kterých polích bude jejich střed.

	A	0	R1	2
	B	1	R2	1
	C	0	R3	1
	D	1	R4	1
	E	0	R5	2
	F	0	R6	1
	G	0	R7	1
	H	0	R8	1
	I	1	R9	1
	Počet:			
	3			

Příklad 3 : Kolik dam ?



Inspirovali jsme se klasickou šachovou úlohou :

„ Kolik dam se vejde na šachovnici (a kde budou postaveny) tak, aby se vzájemně neohrožovaly ?“ Pro jednoduchost jsme použili šachovnici, která má 4x4 pole.

Nejdříve sestavíme obecné pravidlo pro pole a, b . Na poli b nesmí stát dáma, pokud toto pole ohrožuje dáma z pole a .

$$R = \neg(a \wedge b)$$

Poté toto pravidlo převedeme do Hornova tvaru. Vyjdeme z toho, že pokud negace libovolného výroku má být pravdivá, sám výrok je „nepravdivý“.

$$a \wedge b \Rightarrow 0$$

Z Hornova zápisu lehce dostáváme nerovnici $a + b \leq 1$.

Sestavíme všechny nerovnice, které má smysl řešit, tj. takové, které jsou nezbytné pro správnost úlohy.

$$N_1 \dots A1 + B1 \leq 1$$

$$N_2 \dots A1 + C1 \leq 1$$

$$N_3 \dots A1 + D1 \leq 1$$

...

$$N_{76} \dots C4 + D4 \leq 1$$

Tyto nerovnice jsou podmínky, které zadáme do Řešitele.

Výsledek : Na šachovnici o rozměrech 4x4 pole se vejdou pouze čtyři dámy tak, aby byly splněny podmínky úlohy. Jejich možné rozmístění je znázorněno na obrázku výše.

6 Shrnutí

Přesvědčili jsme se o řešitelnosti logických úloh rozličnými metodami, např. odhadem, úpravami logických rovnic či převodem na soustavy algebraických nerovnic s následným dořešením v Řešiteli. Potvrdila se nám užitečnost tohoto nástroje, i když k užívání Řešitele k řešení obtížnějších úloh (rozestavte n dam na $N \times N$ šachovnici) jsou potřeba jisté programátorské dovednosti. Při řešení logických úloh jsme si taktéž potvrdili, jak je důležité si správně přesně naformulovat jednotlivé výroky a neznámé.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat našemu supervizorovi Jaromíru Kukalovi, který se nás pokusil seznámit s taji Booleovské algebry a logiky všeobecně, KSE, FJFI ČVUT V Praze a všem, kteří se podíleli na Týdnu vědy 2010. Těšíme se na případnou další spolupráci.

Reference:

- [1] SMULLYAN, R.M. *Jak se jmenuje tahle knížka* Mladá fronta, 1986, příklad 3.32
- [2] MÉSZÁROS, P. *Analýza množiny binárních vzorů s využitím pokrývacích heuristik*