

Náhodné procházky

aneb náhoda je blbec

K. Heger¹, V. Větrovec²

¹Gymnázium Václava Hraběte, Hořovice, krystofheger@seznam.cz

²Gymnázium Třebíč, Třebíč, v.vetrovec@gmail.com

Abstrakt:

Cílem naší práce je simulace náhodných procházek. Nejprve se na problematiku podíváme teoreticky za pomoci počítání pravděpodobností. Poté ji budeme simulovat na počítači a následně výsledky pokusů porovnáme s teoretickými předpověďmi. Zaměříme se také na srovnání jednotlivých variant procházek - klasické, spojitě a kvantové.

1 Úvod

Na začátek by bylo dobré uvést, co to náhodná procházka vlastně je. S touto myšlenkou přišel statistik Karl Pearson v roce 1905.

Náhodné procházky jsou modely pohybu. Můžeme si je představit jako chodce, který stojí v počátečním bodě. Může dělat libovolně dlouhé kroky do různých směrů. Chodci také můžeme vymezit směry a délku kroku. Takto se může pohybovat po jakési mřížce v dvourozměrném prostoru. Nejjednodušším příkladem je pak pohyb po přímce.

Vlastní pohyb je čistě daný náhodou a jeho délka je daná počtem kroků z dané výchozí polohy. Výsledkem procházky je pravděpodobnostní rozložení, které říká, s jakou pravděpodobností chodec skončí v jednotlivých bodech. Pravděpodobnostní rozložení je ovlivněno danou pravděpodobností pro každý směr pohybu. Při pohybu na přímce může mít chodec pravděpodobnost toho, že zůstane stát, 60%, kroku doleva 30% a doprava 10%. Potom bude výsledná křivka vychýlená od počáteční polohy doleva.

Zkoumali jsme tři druhy náhodných procházek: klasickou, spojitou a kvantovou. V případě klasické procházky se může chodec pohybovat na přímce do dvou směrů a někdy je mu dána i možnost setrvat na místě. Tomuto pohybu se občas říká chůze opilého námořníka. U spojitě procházky má chodec velkou pravděpodobnost, že zůstane na místě. Rychlost této procházky se dá ovlivnit dvěma způsoby. Buď snížíme pravděpodobnost stání, nebo se bude rozhodovat častěji. Kvantová procházka vychází z kvantové mechaniky, a tak chodce považujeme za vlnu, která se šíří prostorem. Pravděpodobnostní maxima se od sebe vzdalují a

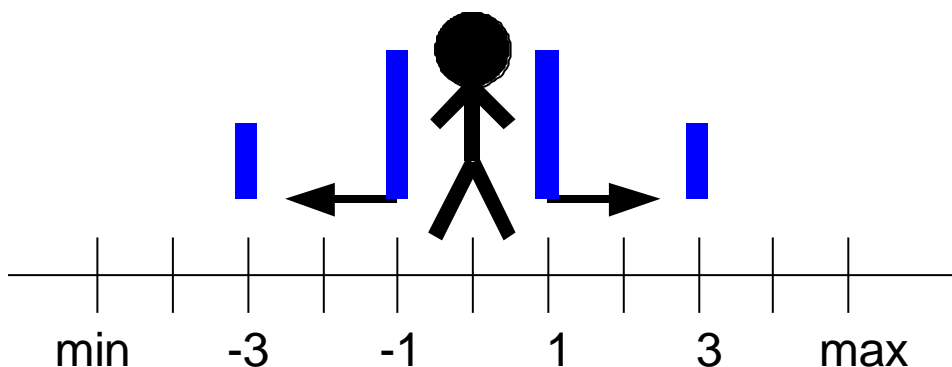
v počátečním bodu dochází k destruktivní interferenci, tudíž se pravděpodobnost razantně sníží.

Náš chodec měl přesně stanovenou délku kroku. Dále mu může být umožněno dělat kroky o náhodné délce nebo také jednu délku kroku a malou pravděpodobnost, s kterou udělá najednou velký skok. Existuje mnoho dalších možností.

2 Pokus s chodcem na přímce

Postavili jsme chodce do výchozí polohy ve středu přímky. Měl možnost udělat krok doleva nebo doprava a rozhodoval se na základě hodu mincí (panna, orel). Pravděpodobnost pohybu do každého směru byla tedy 50%. Stanovili jsme mu počet kroků na pět.

Z šesti opakování pokusu skončil chodec dvakrát v poloze 1, dvakrát v poloze -1, jednou v 3 a jednou v -3.

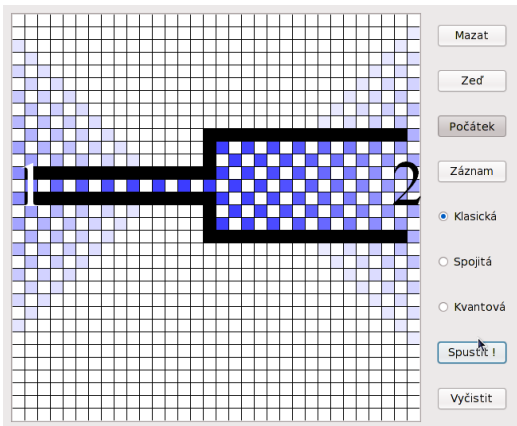


Výsledky ukazují, že pravděpodobnostní křivka má maximum nejbližší výchozí poloze a minimum má v obou extrémních polohách. Potvrdili jsme, že pravděpodobnost je Gaussovsky rozložená. Čím více měření provedeme, tím přesnější hodnoty dostaneme.

Můžeme si také všimnout, že chodec skončil vždy v liché poloze. To je způsobeno počtem kroků, který je také lichý. Pokud by byl sudý, chodec by ušel také sudý počet kroků, nebo by skončil ve výchozí poloze. Aby chodec mohl skončit i v sudých polohách po lichém počtu kroků, přidáme mu možnost setrvat na místě.

3 Pokus s chodcem v dvourozměrném prostoru

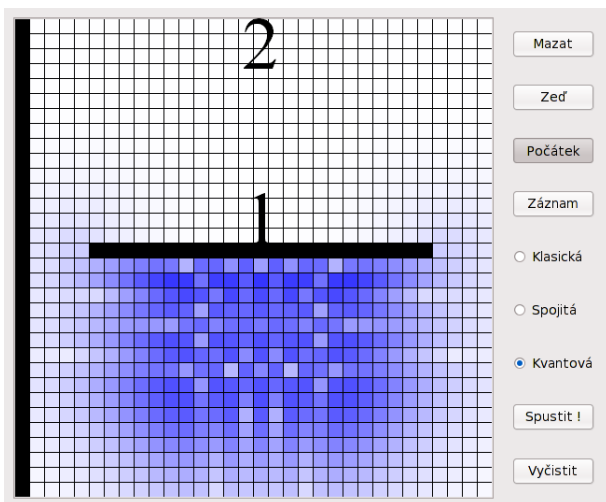
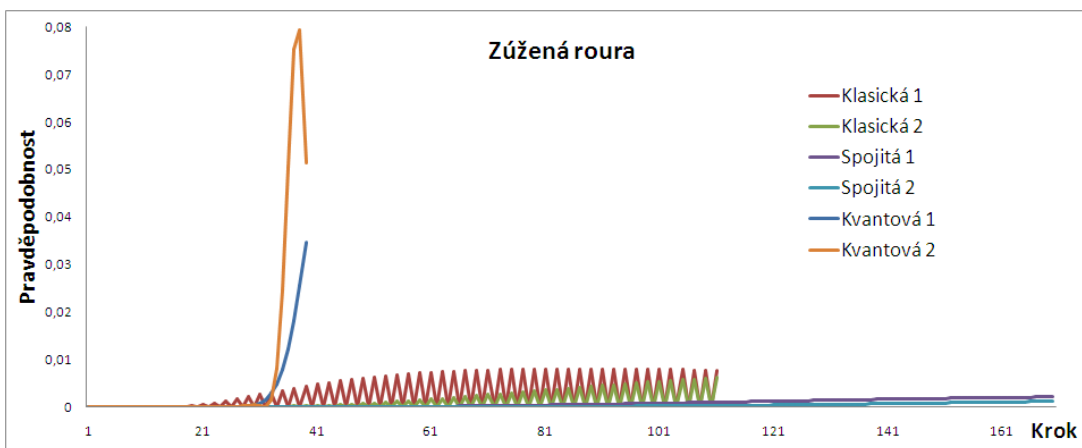
Od supervizora jsme dostali k dispozici program, který simuloval všechny námi zkoumané procházky v rovině. Plocha je rozdělena do 32x32 čtverců. Do jednoho ze čtverců jsme umístili počátek. Dále jsme mohli namalovat zeď, od které se chodec odrážel stejně jako od hranice plochy. Naší další možností bylo zaznamenávat průběh pravděpodobnostní křivky v určitém bodě. Zaznamenané hodnoty jsme dále zpracovávali v Excelu.



Pokus č.1

Zkoumali jsme rychlost šíření pravděpodobnosti tenkou a tlustou trubicí.

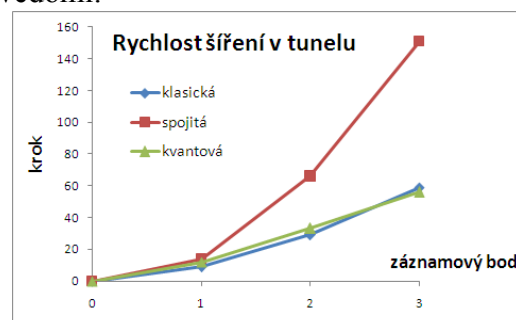
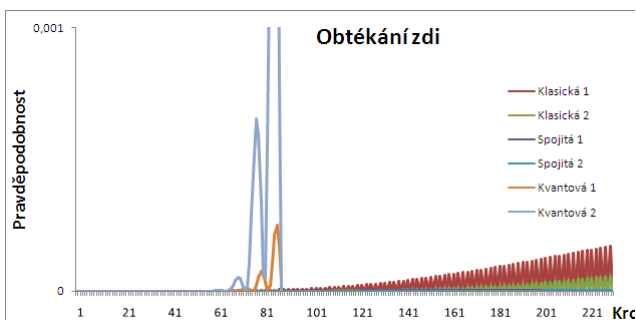
Výsledky jsou patrné z grafu, a to že v užší cestě se pravděpodobnost šíří rychleji než v široké. Výjimku tvoří kvantová procházka. Ta dorazila na konce obou trubic téměř současně a navíc má vyšší pravděpodobnost v bodě 2.

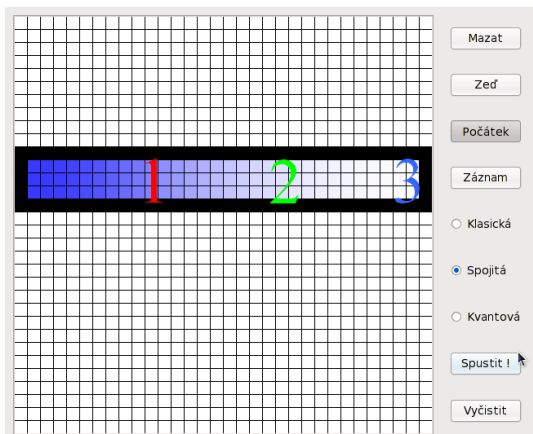


Pokus č.2

Tímto pokusem jsme prozkoumali rychlost šíření za zdí. V poli se nachází ještě druhá zeď, která má za úkol omezit počet polí na lichý počet. Poté máme počátek a záznamové body na ose plochy.

Výsledek nás opět překvapil. Kvantová procházka dorazila do záznamových bodů v opačném pořadí než klasická a spojitá procházka. Znovu se setkáváme s interferencí, která to má na svědomí.





Pokus č.3

Tento pokus ukazuje rychlost šíření pravděpodobnosti do záznamových bodů rovnoměrně vzdálených od počátku v závislosti na druhu procházky.

Výsledek je neméně zajímavý. Spojitá procházka je nejpomalejší, na to už jsme si zvykli. Klasická je zpočátku nejrychlejší (dostane se do 1. bodu za nejmenší počet kroků), ale mezi druhým a třetím bodem je předechnána kvantovou.

4 Shrnutí

Teoretická rychlost šíření pravděpodobnosti je u klasické i spojitě procházky úměrná odmocnině z času, přičemž konstanty úměrnosti jsou různé. Kvantová procházka a její rychlost je přímo úměrná času. Z toho plyne, že rychlost kvantové procházky je vždy největší.

V pokusech jsme ověřili, že rychlosti šíření pravděpodobnosti klasické a spojitě procházky má průběh jako graf odmocniny, tedy zpočátku jsou velmi rychlé a potom se zpomalují. Zatímco rychlost kvantové postupuje prakticky po přímce.

Na kvantovou procházku má velký vliv interference vln. Způsobuje to, že se procházka šíří za překážkou nejlépe pod úhlem 45° .

Toto modelování má využití ve fyzice pro simulaci náhodného pohybu (difúze, Brownův pohyb), v matematice pro ekonomické simulace a v počítačích pro řešení některých speciálních problémů, např. odhadů objemu.

Poděkování

Tímto bychom rádi poděkovali Fakultě jaderně a fyzikálně inženýrské ČVUT a organizátorům Týdne vědy za možnost uskutečnění tohoto projektu, zvláště pak našemu supervizorovi Václavu Potočkovi.

Reference:

[1] Hoskovec A., Hlaváč M., *Teorie náhodné procházky a její ověření*. Sborník Fyzikálního semináře na FJFI ČVUT, Praha (2001)

[2] Bartuňková M., *Náhodná procházka a její aplikace*. Bakalářská práce, Přírodovědecká fakulta MU, Brno (2007)

[3] Hughes D.H., *Random Walks and Random Environments, vol. 1: Random Walks*. Clarendon Press, Oxford, 1995, str. 53--57.