Teorie náhodných matic aneb tak trochu jiná statistika

B. Vlková[1], M.Berg[2], B. Martínek[3], O. Švec[4], M. Neumann[5]

Gymnázium Uničov[1], Gymnázium Václava Hraběte Hořovice[2], Mendelovo gymnázium Opava[3], Gymnázium Uherské hradiště[4,5]

baja01@seznam.cz[1], m.berg@centrum.cz[2], breta21@seznam.cz[3], ondrej.svec@seznam.cz[4], michaelneumann@centrum.cz[5]

Abstrakt

V tomto příspěvku se zabýváme vlastními čísly náhodných matic. Nejpve definujeme základní pojmy z oblasti matic, jako například vlastní číslo matice a její hermiticita. Dále se zaměříme na Gaussovo rozdělení. Poté zavedeme náhodné matice a budeme diskutovat jejich vlastnosti. Teoretické poznatky dále ověříme numericky v prostředí MATLAB.

1 Úvod

Tento příspěvek je úvodem do teorie náhodných matic. Budeme se zabývat vlastními čísly matic, Gaussovým rozdělením, Hermitovskou maticí, analýzou a aplikací matic v dopravě, v chování plynů a v modelování radioaktivního rozpadu. Zmíníme se o typech (GOE, GUE, ...) a parametrech, které ovlivňují rozdělení vlastních čísel. Neopomeneme ani program MATLAB, který umožňuje uživatelsky snadnou manipulaci s maticemi.

2 Matice

Matice je obdélníková či čtvercová tabulka čísel nebo nějakých matematických objektů, která umožňuje např. jednodušší řešení soustav lineárních rovnic.

2.1 Vlastní čísla matic

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá vlastní nebo charakteristické číslo matice A, jestliže existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ tak, že $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ se nazývá vlastní nebo charakteristický vektor příslušný k λ.

Příklad:
Hledání vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

vede na řešení soustavy s parametrem λ

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x_1 + 3x_2 &= 0\\ 4x_1 + (3-\lambda)x_2 &= 0,\end{aligned}$$

přičemž λ hledáme takovou, aby x_1 a x_2 zároveň nebyly obě nulové. λ, pro kterou to platí je vlastní číslo matice.

2.2 Hermitovská matice

Komplexní čtvercová matice A se nazývá hermitovská, platí-li $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A}^H$ je hermitovsky sdružená matice, která je definována $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^T)^*$, kde $\mathbf{A}^T$ je transponovaná matice, pro kterou platí, že $(a_{ij})^T = (a_{ji})$ a $\mathbf{A}^*$ je komplexně sdružená matice.

Příklady:

- Transponovaná matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

- Komplexně sdružená matice

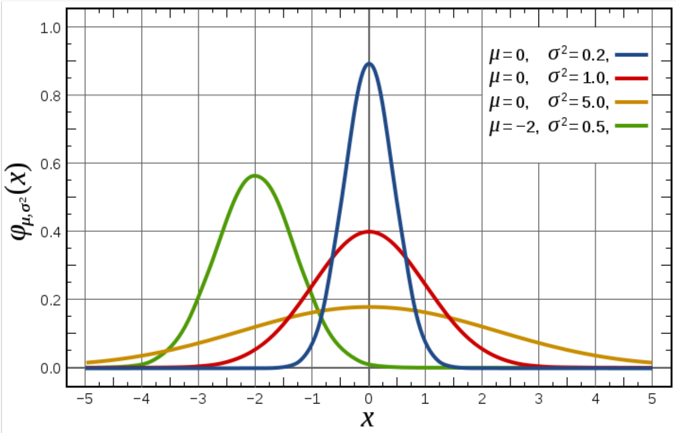
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3i & 5\\ 2 & 4 & 6+i\\ 7 & 8i & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -3i & 5\\ 2 & 4 & 6-i\\ 7 & -8i & 9 \end{pmatrix}$$

- Hermitovská matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i & 5i & 1\\ 4+3i & 1 & 6+2i & 1-i\\ -5i & 6-2i & 0 & 9\\ 1 & 1+i & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

3 Gaussovo rozdělení

Gaussovo (nebo normální) rozdělení pravděpodobnosti je jedno z nejdůležitějších rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny. Hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení je pro různé parametry μ (střední hodnota) a σ^2 (rozptyl) zobrazena na obrázku 1.



Obrázek 1: Hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení pro různé parametry

4 Náhodné matice

Náhodné matice jsou podmnožinou množiny matic, jejichž prvky jsou náhodná čísla. Tato čísla mohou být z libovolného rozdělení, v praxi se však nejčastěji vyskytují matice s normálním (Gaussovým) rozdělením.
Typy náhodných matic:

- **GOE** (Gaussovské ortogonální matice) Jedná se o množinu čtvercových reálných symetrických matic, jejichž prvky jsou statisticky nezávislé gaussovsky rozdělené náhodné veličiny.

- **GUE** (Gaussovské unitární matice) Jedná se o množinu matic s komplexními čísly. Jsou to hermitovské matice, kde pro reálnou část platí stejné podmínky jako u GOE, imaginární část u prvků na hlavní diagonále musí být nulová. Imaginární části ostatních prvků jsou náhodná čísla z normálního rozdělení.

- **BRME** (Pásové náhodné matice) Jedná se o množinu reálných a komplexních matic, které mají v pravém horním a levém dolním rohu "nulový trojúhelník", jehož velikost je popsána parametrem b (tzv. pološířka pásu).
  Příklad pásové matice řádu 4 s $b = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Rozdělení vlastních čísel náhodných matic

Girkův zákon říká, že vlastní čísla náhodné matice jsou rovnoměrně rozmístěna v jednotkovém kruhu. Dále přejděme k hermitovským maticím. Jejich vlastní čísla jsou reálná a popsána Wignerovým zákonem, tj. hustotou pravděpodobnosti

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{4n - \lambda^2},\ \ |\lambda| \leq 2\sqrt{n},$$

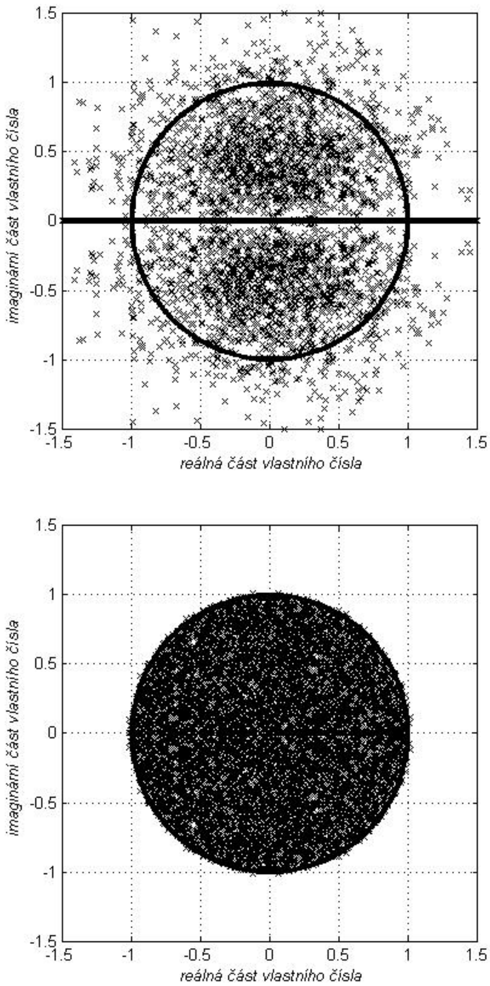
kde n je rozměr matice. Pokud pro náhodnou matici zjistíme vlastní čísla, která seřadíme podle velikosti a spočteme jejich rozdíly, získáme množinu čísel, která má určité rozdělení, popsané hustotou pravděpodobnosti (Izrailevův vzorec)

$$f(r) \approx A\left(\frac{\pi r}{2}\right)^{\beta} \mathrm{e}^{-\frac{\beta\pi^2}{16}r^2-\left(B-\frac{\beta\pi}{4}\right)r},\ r \geq 0,$$

kde β je 1 pro GOE, 2 pro GUE a pro pásové matice $\beta \in \langle 0; 1\rangle$ a A a B jsou parametry zajišťující, že vzorec je hustota pravděpodobnosti a střední hodnota vzdálenosti je 1.

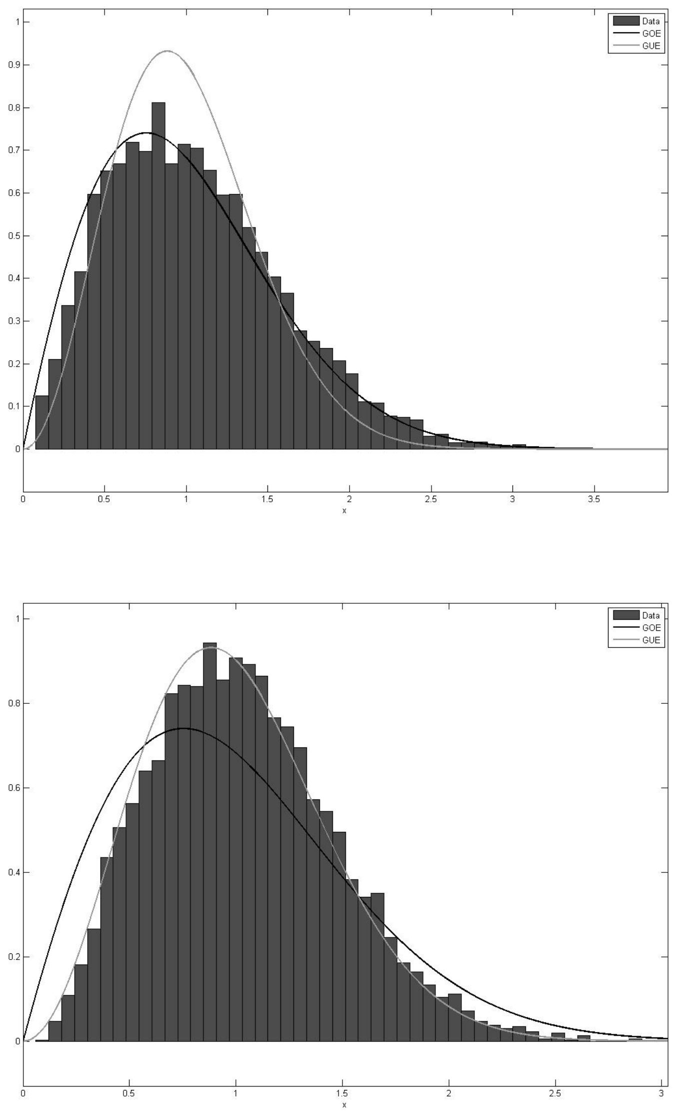
6 Výsledky experimentů

Zabývali jsme se zkoumáním rozdělení vlastních čísel náhodných matic na zadaných parametrech (střední hodnota prvků, rozptyl prvků, rozměr matice, počet vygenerovaných matic, případně pološířka pásu) a jejich vlivem na graf závislosti. Počet matic byl volen tak, aby celkový počet vlastních čísel byl vždy 10 000, např. matic řádu 2 bylo vygenerováno 5 000. Experimenty byly prováděné v programu MATLAB



Obrázek 2: Test Girkova zákona pro matice řádu 2 (nahoře) a 1000 (dole)

Obrázek 2 ilustruje rozdělení hodnot vlastních čísel v komplexní rovině pro různé rozměry náhodné matice . Je patrné, že s rostoucím rozměrem matice se vlastní čísla soustřeďují do jednotkové kružnice. Navíc je dobře patrný pokles počtu reálných vlastních čísel.



Obrázek 3: Test Izrailevova zákona pro matice GOE(nahoře) a GUE(dole)

Experimentálně jsme ověřili platnost Izrailevova zákonu, který popisuje pravděpodobnostní rozložení rozdílů vlastních čísel náhodných matic. Výsledky jsou na obrázku 3.

7 Shrnutí

Příspěvek sloužil jako úvod do teorie matic a matematické statistiky. Obě tyto oblasti byly spojeny v teorii náhodných matic. Také posloužil k seznámení s prostředím MATLAB. Veškeré předkládané teoretické poznatky byly úspěšně numericky ověřeny ve zmíněném prostředí.

Poděkování

Autoři děkují především supervizorovi Bc. Martinovi Veselému za vedení našeho projektu ke zdárnému konci. Dále chtějí vyjádřit své díky Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT.

Reference

[1] VESELÝ M.: *Úvod do teorie náhodných matic(bakalářská práce)*, vedoucí práce: Mgr. Milan Krbálek Ph.D., ČVUT v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Praha, (2010)

[2] *Gaussovo rozdělní*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Gaussovo_rozdělení

[3] *Vlastní čísla*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Vlastní_číslo

[4] *Vlastní čísla a vlastní vektory matic*
http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/13_MI_KAP%202_6.pdf

[5] *Náhodné matice*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Náhodné_matice