Po stopách Isaaca Newtona

Lukáš Vejmelka, GOB a SOŠ Telč, lukasv@somt.cz
Jakub Šindelář, Gymnázium Třebíč, sindelar.jakub@gmail.com
Zuzana Černáková, Gymnázium Česká Lípa, cernakova.zuzka@gmail.com
Hana Nováková, Masarykovo gymnázium Příbor, hanicka.novacka@gmail.com

21. června 2011

Abstrakt

V našem miniprojektu jsme se vydali po stopách dávných badatelů a snažili jsme se symbolicky odvodit hlavní zákonitosti vesmíru - Newtonův gravitační zákon. Vžili jsme se do situace našich předků, kteří neměli k dispozici k získání údajů matematicko-fyzikální a chemické tabulky a postupovali jsme tedy od úplných začátků. Hlavním cílem experimentu bylo naleznout závislost gravitačního zrychlení tělesa na vzdálenosti od hmotného středu jiného tělesa. Za použití vlastních experimentálně naměřených hodnot a hodnot z klasických pokusů již dříve provedených jsme došli k následujícímu závěru:

$$a_g \sim \frac{1}{r^{2,09}}$$

Což je velice blízké skutečnosti, že **gravitační síla** (zrychlení) je **nepřímo úměrná druhé mocnině** vzdálenosti.

1 Úvod

V našem experimentu při hledání závislosti $F = F(r)$ resp. $a = a(r)$ jsme se zaměřili na zkoumání gravitačního pole Země, právě ona byla v nejstarších dobách nejběžnějším místem k pozorování. K správnému určení funkce popisující gravitaci potřebujeme znát zrychlení a vzdálenost od středu Země na dvou různých místech. Vzhledem k možnostem měření jsme zvolili zemský povrch a střed Měsíce.

2 Postup řešení

2.1 Teoretické úvahy

K nalezení správné závislosti potřebujeme znát gravitační zrychlení při povrchu Země g, poloměr Země R_z, gravitační zrychlení Měsíce a_m, vzdálenost Měsíce od středu Země r_m.

2.1.1 Gravitační zrychlení při povrchu Země a_m

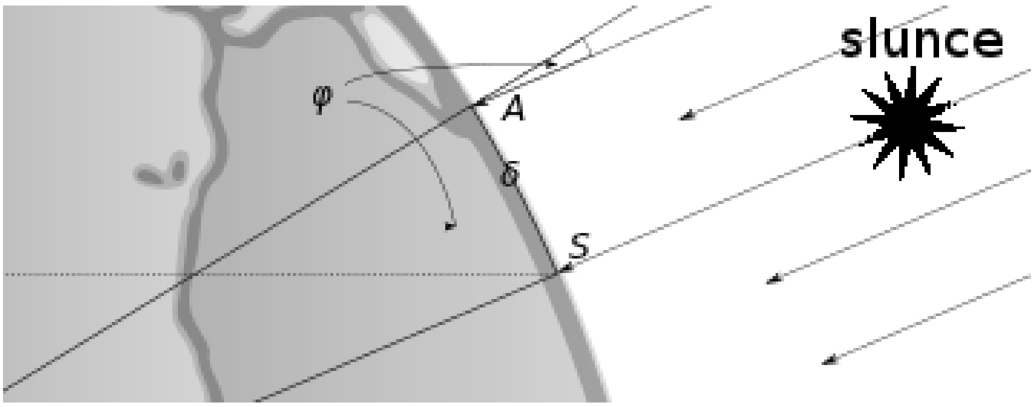
Už v 16. století Galileo Galilei pomocí šikmé věže v Pise změřil tíhové zrychlení. Změřil dobu pádu a výšku sestupu předmětu při volném pádu z věže a vypočítal tíhové zrychlení: $g = \dfrac{2.h}{t^2}$. Správně bychom měli uvažovat a_g, ale vzhledem k $a_g \approx g$ použijeme naměřené g.

2.1.2 Gravitační zrychlení Měsíc $a_m \approx g$

Jaká síla drží Měsíc na oběžné dráze kolem Země? Je to ta, která působí na jablko padající ze stromu? Působí-li na Měsíc ona síla, je mu uděleno zrychlení a_m. Aby se měsíc pohyboval kolem Země a neuletěl do vesmíru, musí pro gravitační a odstředivé zrychlení platit: $\overrightarrow{a_m} + \overrightarrow{a_o} = 0$. Ona síla by tedy měla být silou dostředivou a pro dostředivé zrychlení platí: $a_m = \omega^2.r = \left(\frac{2\pi}{T_{sid}}\right)^2.r$. K výpočtu zrychlení měsíce bude potřeba zjistit skutečnou periodu oběhu - siderický měsíc a vzdálnost měsíce od středu země.

2.1.3 Poloměr Země R_z

Původní představy například o plochosti zeměkoule nahradili někteří antičtí myslitelé domněnkou kulatosti Země. Soudili tak především z pozorování zatmění měsíce, kdy při přechodu temného kotouče stínu Země je znatelná kulatá oblast. Také při vzdalování lodí na moři se loď postupně ztrácí z obzoru. Eratosthenes provedl jako jeden z prvních měření zemského obvodu. Přibližně změřil vzdálenost z Alexandrie do Syeny, kdy předpokládal, že leží na stejném poledníku. Tomuto oblouku přísluší středový úhel, který však vzhledem k neznámému poloměru Země nebyl schopen vypočítat. Využil ale poznatku, že v Syeně v určitý den dopadají sluneční paprsky tak, že žádný kolmý předmět nevrhá stín - tedy paprsky dopadají rovnoběžně s tíhovým (gravitačním zrychlením). Úvahou, která je patrná z následujícího obrázku, správně určil souvislost mezi úhlem, pod kterým je vidět slunce v Alexandrii a středovým úhlem obou míst. Změřil tedy úhel pod jakým úhlem je v Alexandrii vidět v daný den slunce a doplněk do 180^o je roven středovému úhlu obou míst. Ze znalosti těchto údajů je možné vypočítat R_z; středovému úhlu přísluší délka oblouku (vzdálenost obou míst) a úhlu 2π přísluší obvod celé kulového plochy.



Obrázek 1: Eratosthenova metoda měření obvodu Země. (www.wikimedia.org)

2.1.4 Vzdálenost Měsíce od středu Země r'

Vzdálenost měsíce od středu Země je rovna: $r = r' + R_z$. R_z již známe a vzdálenost Měsíce od pozorovatele na Zemi r' lze vypočítat pomocí zorného úhlu a velikosti měsíce.

Poloměr měsíce R_m nebyl dlouho znám. Později bylo zjištěno, že je možné při pozorování zatmění Měsíce zjistit poměr R_m/R_Z a to měřením časů mezi určitými fázemi zatmění a následně vypočítat poloměr Měsíce.

2.2 Měření a zpracování naměřených veličin

2.2.1 Měření gravitačního zrychlení

Gravitační (resp. tíhové) zrychlení by bylo možné změřit podobně, jako to udělal Galileo Galilei. My jsme bez měření použili hodnotu: $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

2.2.2 Měření časů zatmění Měsíce

V době Týdnu vědy na Jaderce 2011 bohužel nedošlo k zatmění Měsíce a nemohli jsme příslušné hodnoty naměřit. Použili jsme tedy naměřené hodnoty z 16. června 2000. Doba od počátku zatmění do stavu, kdy se celý Měsíc dostane do stínu Země byla $t = 65\ min$. Doba od úplného objevení Měsíce ve stínu Země do doby těsně před začátkem jeho ústupu byla $T = 272\ min$.

2.2.3 Měření zorného úhlu měsíce

Úhel, pod kterým je vidět Měsíc z povrchu Země jsme neměřili, použili jsme už dříve naměřenou hodnotu: $\beta = 31,7'$.

2.2.4 Měření minimální délky stínu tyče

K výpočtu poloměru Země jsme použili modifikovanou Eratosthenovu metodu. Za pomocí dlouhé tyče umístěné kolmo k zemi jsme sledovali délku stínu v okolí pravého poledne, kdy na průsečíku našeho poledníku s obratníkem Raka směřují sluneční paprsky kolmo k Zemi. Naměřili jsme deset různých délek v určitých časech a to ve dvou nezávislých měřeních.

První měření, délka tyče $l_1 = 186cm$

číslo měření	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
délka stínu a_1/cm	93,1	92,2	91,5	91,1	91,4	91,7	91,9	93,4	94	95
čas měření	12:39	12:44	12.57	13:01	13:05	13:16	13:19	13:30	13:35	13:41

Druhé měření, délka tyče $l_2 = 142cm$

číslo měření	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
délka stínu a_2/cm	72	71,8	71,6	70,8	70,7	72,4	73,2	73,3	73,9	74,5
čas měření	12:40	12:45	12.57	13:02	13:16	13:29	13:32	13:37	13:42	13:47

2.3 Výpočet

2.3.1 Zpracování naměřených délek stínu

Pro výpočet potřebujeme nejkratší délku stínu. Pro každé měření zhotovíme graf závislosti délky stínu na čase a proložíme jimi regresní křivku.

Rovnice regresních funkcí:

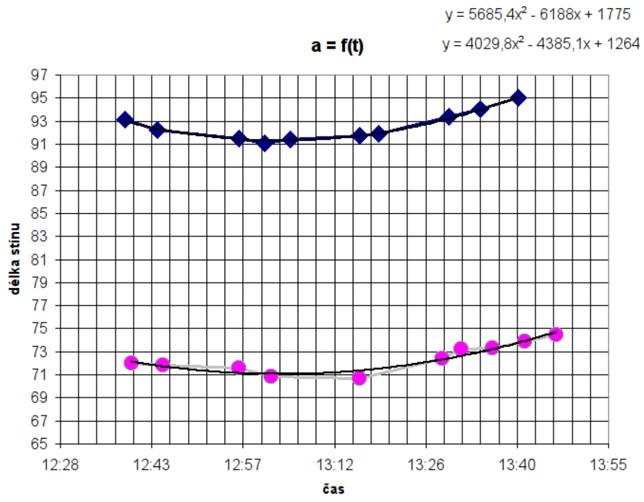
$$f_1 : y = 5685,4x^2 - 6188x + 1775$$
$$f_2 : y = 4029,8x^2 - 4385,1x + 1264$$

Derivace funkcí položíme rovny nule a vypočítáme minimum funkcí:

$$x_{min1} = 13 : 03 : 38$$
$$x_{min2} = 13 : 03 : 28$$

A funkční hodnoty pro tyto body jsou nejkratší délky stínů:

$$a_{min1} = 91,2\ cm$$
$$a_{min2} = 71,1\ cm$$



Obrázek 2: Grafy závislostí $a = f(t)$

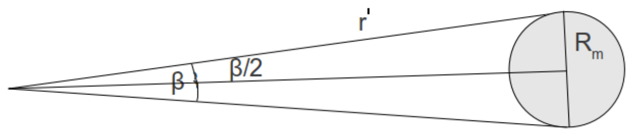
A pro úhly, které svírá tyč se slunečními paprsky:

$$tg\alpha = \frac{a_{1,2}}{l_{1,2}}$$

Aritmetický průměr z obou úhlů vychází: $\alpha = 26^o22'$ Vzdálenost Jaderky v Břehové ulici v Praze od průsečíku stejného poledníku s Obratníkem Raka jsme změřili v GoogleEarth: $s = 2960\ km$. Na tomto průsečíku v 13:03:38 svítí slunce kolmo k zemi a u nás na Břehovce je slunce nejvýše - je pravé poledne. Platí: $\frac{\alpha}{s} = \frac{360^o}{2\pi.R_z}$ a odtud: $R_z = 6432\ km$

2.3.2 Vzdálenost Měsíce od středu Země

Vzdálenost r je rovna $r = r' + R_z$. R_z jsme vypočítali a r' vypočítáme dle následujícího obrázku.



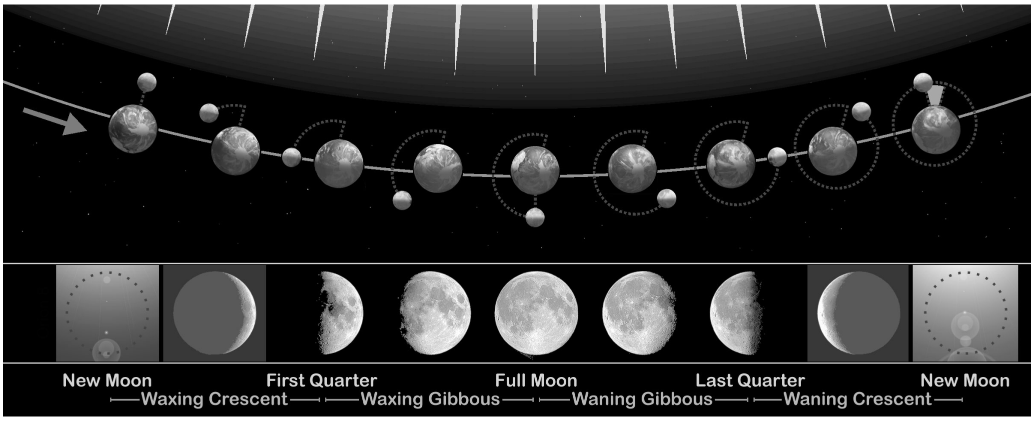
Obrázek 3: K výpočtu vzdálenosti Měsíce ze zorného úhlu.

Pro r' platí: $r' = \frac{2R_m}{\beta} = 333364\ km$.

A celkové $r = r' + R_z = 339796\ km$

2.3.3 Výpočet periody Měsíce

Není měsíc jako měsíc. Měsíc, který běžně používáme, je doba mezi dvěma stejnými fázemi měsíce při pozorování ze Země. Doba oběhu Měsíce kolem Země vzhledem ke hvězdám je tzv. siderický měsíc. Synodický měsíc trvá $T_{syn} = 29,5\ dne$, po přepočtu vychází $T_{sid} = 27,3\ dne$, což je skutečná doba, kdy dojde přesně k jednomu oběhu kolem Země; na Zemi bychom však onu fázi pozorovali později.



Obrázek 4: Rozdíl mezi siderickým a synodickým měsícem (www.wikimedia.org).

2.3.4 Výpočet gravitačního zrychlení Měsíce

$a_m = \omega^2.r = \left(\frac{2\pi}{T_{sid}}\right)^2.r = 2,4.10^{-3}\ m.s^{-2}$

2.4 Závěr

2.4.1 Tabulka výsledků

	povrch Země	Měsíc
zrychlení	$g = 9,8\ m.s^{-2}$	$a_m = 2,4.10^{-3}\ m.s^{-2}$
vzdálenost	$R_z = 6432\ km$	$r = 339796\ km$

2.4.2 Zkoumání závislosti $a = f(r)$

Uvažujme:

$$g = k.\frac{1}{{R_z}^x}$$
$$a_m = k.\frac{1}{{R_m}^x}$$

Řešením soustavy rovnic získáme:

$$x = \frac{ln\frac{g}{a_m}}{ln\frac{R_m}{R_z}} = 2,09.$$

Odvodili jsme zákon ve tvaru:

$$a_g = k.\frac{1}{r^2}.$$

3 Shrnutí

Měření bylo zatíženo chybami; vzhledem k oblačnosti nebylo možné v potřebných intervalech odečítat délku stínu. Některé hodnoty nebylo možné změřit a museli jsme se spolehnout na údaje z internetu. Podařilo se nám s dobrou přesností vypočítat závislost $a = f(r)$. V budoucnu bychom třeba mohli Newtonův gravitační zákon odvodit přesně pomocí Keplerových zákonů.

Poděkování

Děkujeme především naší supervisorce Ing. Heleně Šedivákové za vedení a trpělivé úsilí. Děkujeme také naší v boji padlé kolegyni Zuzce za obětavé nasazení. Neméně velký dík patří i Ing. Vojtěchu Svobodovi za organizaci Týdne vědy@FJFI a Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské při Českém vysokém učení technickém v Praze za poskytnutí zázemí našemu „vědeckému“ bádání.

Reference

[1] *Doba oběhu na wikipedii*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Doba_ob%C4%9Bhu

[2] *Isaac Newton na wikipedii*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

[3] *Eratosthenes z Kyreny na wikipedii*
http://cs.wikipedia.org/wiki/Eratosthen%C3%A9s_z_Kyr%C3%A9ny