Chaotická dynamika

Jan Hošek[1], Jan Prachař[2], Lukáš Nevařil[3], Radim Šojdr[3], Václav Valeš[4]
[1]Gymnázium J. K. Tyla,
[2]Gymnázium F. M. Pelcla,
[3]Arcibiskupské gymnázium Kroměříž,
[4]Gymnázium Brno tř. Kpt. Jaroše

supervisor: Ing. Vojtěch Svoboda

26.6.2002

Abstrakt

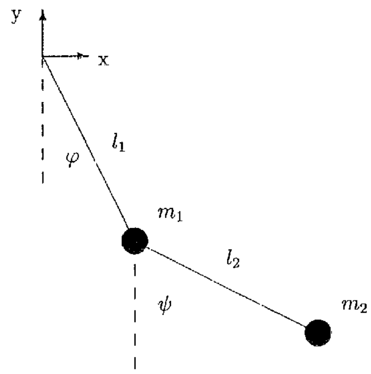
Zabývali jsme se dvěma fyzikálními systémy: dvojitým kyvadlem a elektrickým obvodem s nelineárním prvkem. Tyto systémy se na středních školách běžně nepopisují. Našim cílem bylo podrobněji popsat chování těchto systémů. Zjistíme nějaké pro nás neočekávané chování?

1 Úvod

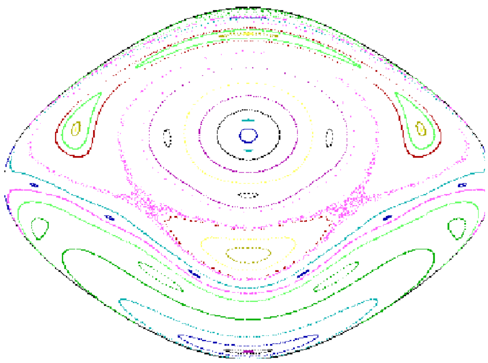
Máme-li zadány přesné počáteční podmínky, můžeme dopočítat, jak se soustava bude vyvíjet. V mechanice k tomuto účelu máme Newtonovy pohybové rovnice $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Podle naší zkušenosti je přirozené, že změníme-li nepatrně počáteční podmínky, změní se nepatrně i koncový stav soustavy. Existují ovšem soustavy, které se při nepatrně odlišných počátečních podmínkách dostanou do úplně jiných koncových stavů. Dokonce můžeme dostat různě koncové stavy pro různou přesnost výpočtu. Těchto jevů si poprvé všiml Edward Lorenz. Naprostá většina soustav se dvěma stupni volnosti se pro určité počáteční podmínky chová chaoticky. My jsme se zabývali dvěma soustavami a zjišovali, kdy se chovají chaoticky.

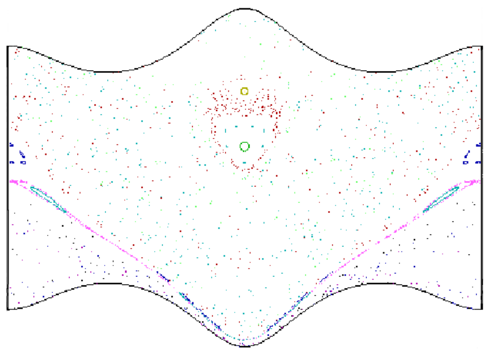
2 Dvojité kyvadlo (Double pendulum)

Dvojité kyvadlo je znázorněno na obrázku 1. Pohyb kyvadla popíšeme dvěma parametry: úhly φ a ψ. Při simulacích na počítači jsme měli $m_1 = m_2 = 1\,\mathrm{kg}$ a $l_1 = l_2 = 1\,\mathrm{m}$. Fázový prostor je čtyřrozměrný (osy φ, ψ, $\dot{\varphi}$ a $\dot{\psi}$). Pohyb kyvadla reprezentuje pohyb bodu ve fázovém prostoru. Vzhledem k tomu, že se čtyřrozměrný prostor nelze na papíře znázornit, znázorňujeme průmět do jedné ze 6ti možných rovin určených osami φ, ψ, $\dot{\varphi}$ a $\dot{\psi}$. Další možností je znázornit řez tímto fázovým prostorem, to jsou tzv. Poincarého řezy. My jsme vzali jeden speciální Poincarého řez. Zafixovali jsme hodnotu celkové energie soustavy a úhel $\psi = 0$, zbyli nám tedy dva stupně volnosti φ a $\dot{\varphi}$. Pohyb kyvadla potom znázorníme v souřadnicích $(\varphi, \dot{\varphi})$. V okamžiku, kdy trajektrorie bodu předsta-vující pohyb kyvadla protne tuto rovinu, zaznamáme v grafu bod. Význam tohoto Poincarého řezu je, že vynášíme hodnoty φ a $\dot{\varphi}$ v okamžicích, kdy spodní kyvadlo prochází rovnovážnou polohou. Grafy pro různé hodnoty energie jsou znázorňeny na obrázcích. Různé barvy teček odpovídají různým počátečním podmínkám Pohyb kyvdla pro různé počáteční podmínky vytváří ovály, v jejichž středech se nacházejí tzv. atraktory. Pro určité počáteční podmínky neobíhá bod ve fázovém prostoru kolem jednoho určitého atraktoru, ale atraktory, kolem kterých obíhá, se různě mění (to je vidět na obrázcích). To odpovídá chaotickému chování. Stačí totiž malá změna počátečních podmínek a bod ve fázovém prostoru se bude pohybovat úplně jinak než předtím.



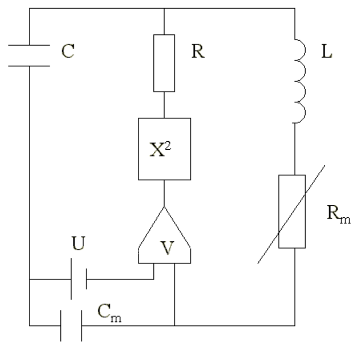
obr 1. dvojité kyvadlo


obr 2. $E = 10\,\mathrm{J}$


obr 3. $E = 100\,\mathrm{J}$

3 Nelineární elektrický obvod

Měli jsme oscilační elektrický obvod, který je znázorněn na obrázku 4. V obvodu byly zapojeny součástky s následujícími parametry: $v = 1,2\,\mu\mathrm{V}$, $R = 3300\,\Omega$, $C = 47\,\mathrm{nF}$, $C_m = 47\,\mathrm{nF}$, $L = 0,1\,\mathrm{H}$ a $U_0 = 4\,\mathrm{V}$. Je možno si všimnout, že v obvodu je zapojena součástka x^2, která má na výstupu čtverec vstupního napětí. Tato součástka zapříčiňuje chaotické chování obvodu pro určité hodnoty R_m. Tento obvod jsme také simulovali pomocí počítače (v programu Chaosgen). Měnili jsm odpor R_m a měřili napětí U na tomto odporu. Podle [1] pro U platí rovnice

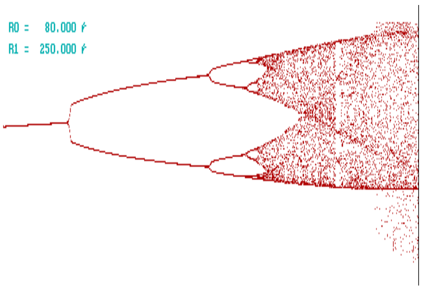


obr. 4 schéma obvodu

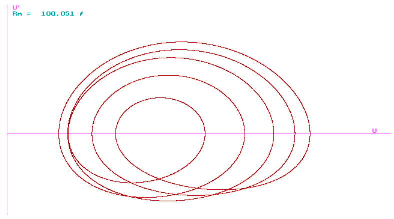
$$\frac{\mathrm{d}^3 U}{\mathrm{d}t^3} + a\ddot{U} + b\dot{U} + cU = cv^2(U - U_0)^2,$$

kde $a = \frac{1}{RC} + \frac{R_m}{L}$, $b = \left(1 + \frac{R_m}{R} + \frac{C}{C_m}\right)/LC$ a $c = \frac{1}{LCRC_m}$. Chování obvodu, lze dobře znázornit jak ve fázovém diagramu, tak i v bifurkačním diagramu. V bifurkačním diagramu je na svislou osu vynášeno maximum napětí U a na vodorovnou osu odpor R_m. Hodnoty maxim se mohou periodicky opakovat nebo se neustále neperiodicky měnit. Pro hodnotu odporu $R_m > 208\,\Omega$ byl naměřen harmonický průběh napětí. Pro $R_m > 141\,\Omega$ se periodicky střídají dvě maximální hodnoty U, pro $R_m > 128\,\Omega$ čtyři a pro $R_m > 124\,\Omega$

osm. Zhruba od hodnoty $R_m = 120\,\Omega$ je dynamika chaotická. Bifurkační diagram a fázový diagram $(U, \dot{U})$ jsou znázorněny na následujícím obrázku:



obr. 4 bifurkační diagram pro $250\,\Omega \gg R_m \gg 80\,\Omega$



obr. 5 fázový diagram pro $R_m = 100\,\Omega$

4 Shrnutí

Popisované soustavy se pro určité hodnoty vstupních parametrů chovají chaoticky. My jsme tyto počáteční parametry hledali pomocí počítačových programů. Toto chování pro nás bylo překvapivé, neboť jsme se s ním dosud nesetkali. Obor chotické dynamiky byl v posledních letech ve středu zájmu některých fyziků, je neoddělitelnou součástí některých jiných disciplín fyziky (meteorologie, fyzika plazmatu, ...). Studium chaotické dynamiky je kličové pro popis složitějších fyzikálních systémů.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat za finanční podporu a umožnění realizace miniprojektu FJFI ČVUT, za konzultace našemu supervizorovi.

Reference

[1] H. J. Korsch, H.-J. Jodl. *Chaos.* Springer-Verlag 1994.