(Hyper)komplexní čísla a fraktály

D. Komárek, F. Koňařík, T. Vondrák
Masarykovo gymnázium, Příbor,
Gymnázium F. Palackého, Valašské Meziříčí,
Gymnázium M. Lercha, Brno
dankomarek@seznam.cz, fik.konarik@email.cz, vondrak.thomas@gmail.com

Abstrakt

Práce pojednává o konstrukci komplexních fraktálů (jako jsou Mandelbrotova množina a Juliovy množiny), hyperkomplexních fraktálů (za pomoci kvaternionů) a matematikou, která je za konstrukcí těchto množin. U problematiky zobrazení hyperkomplexních množin se práce zabývá také redukcí dimenzí za pomoci lineárních podprostorů.

1 Úvod

V práci se zabýváme konstrukcí komplexních fraktálů a jejich zobecněním do vyššího číselného oboru. Fraktály jsou objekty vykazující podobné vlastnosti na různých škálách.

Jedním z nejznámějších fraktálů, jímž se zabýváme, je Mandelbrotova množina. Dalším příkladem fraktálů jsou Juliovy množiny, které jsou v jistém smyslu duální k Mandelbrotově množině.

Komplexní fraktály jsme poté zobecnili do čtyř dimenzí pomocí kvaternionů, což jsou čtyř-dimenzionální čísla, která zavedl W. R. Hamilton a používají se například pro reprezentaci rotací v třírozměrném prostoru.

2 Fraktály

Mandelbrotova množina

Jestliže $c = x + i\,y$, kde i je imaginární jednotka, $x, y \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$, řekneme, že c je komplexní číslo, $c \in \mathbb{C}$. Mějme posloupnost

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{1}$$

kde $z_0 = c$ (nazýváme to nultou iterací) a $n \in \mathbb{N}$.

Do Mandelbrotovy množiny potom patří taková čísla c, pro něž je posloupnost (1) omezená. Při vykreslování je hledána taková iterace n, pro kterou nastane: $|z_n| > 2$. Takové c do množiny nepatří. Nalezená hodnota n je použita pro obarvení daného bodu. [2] (Obr. 1a)

Juliova množina

Na rozdíl od Mandelbrotovy množiny je množina Juliova předepsána vztahem

$$z_{n+1} = z_n^2 + d, \tag{2}$$

kde d je libovolné komplexní číslo. Z toho vyplývá, že Juliových množin je nekonečně mnoho. (Obr. 1b)

Kvaterniony

Zobecněním komplexních čísel dostaneme čtyř-dimenzionální hyperkomplexní čísla – kvaterniony. Jejich tvar je následující: $q = a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou imaginární jednotky, pro něž platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ ik = -ki &= -j \\ jk = -kj &= i, \end{aligned}$$

potom $q \in \mathbb{H}$. [1]

Hyperkomplexní fraktály

Rozšíříme-li předchozí množiny do vyšších dimenzí, tak dostaneme hyperkomplexní fraktály, což jsou čtyř-rozměrné množiny, které jsou definovány jako Juliovy množiny, kde $z, d \in \mathbb{H}$.

Lineární podprostory

Protože jsou hyperkomplexní fraktály čtyř-dimenzionální struktury, tak je třeba pro jejich zobrazení snížit dimenzionalitu množiny volbou vhodného lineárního podprostoru.

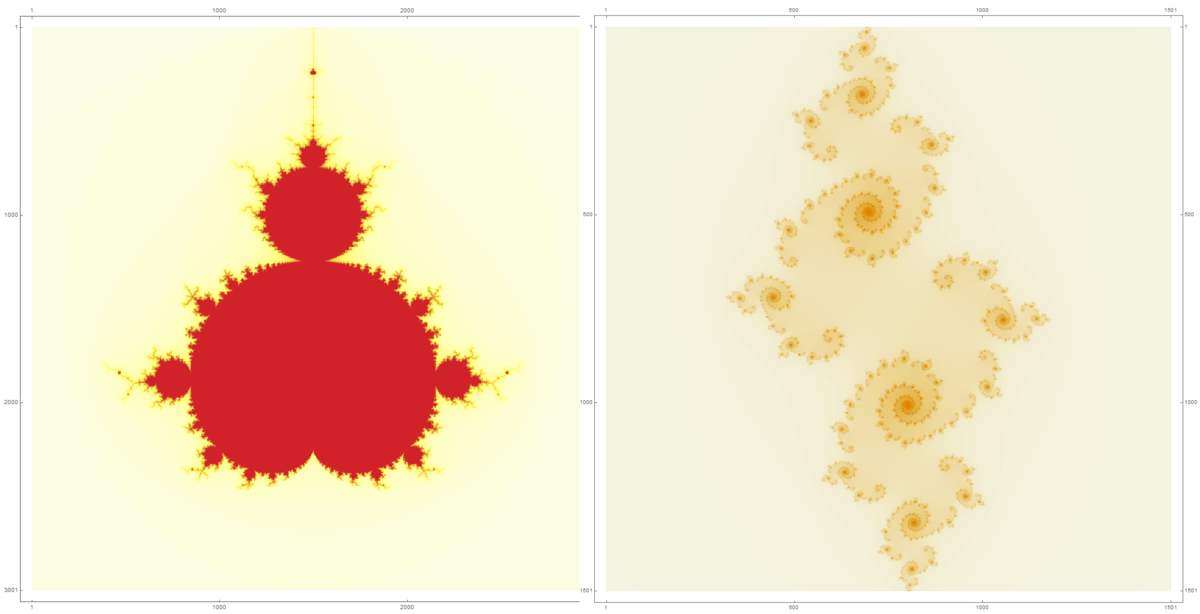
Mějme prostor všech n-tic reálných čísel $P = \mathbb{R}^n$ o dimenzi n. Chceme-li vytvořit lineární podprostor Q o dimenzi k, vezmeme všechny lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$:

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i\,\vec{x}_i \,\middle|\, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3}$$

V našem případě byl potřeba tří-dimenzionální (Obr. 2a) a dvou-dimenzionální (Obr. 2b) podprostor, na němž jsme hyperkomplexní fraktál vykreslovali. [3]

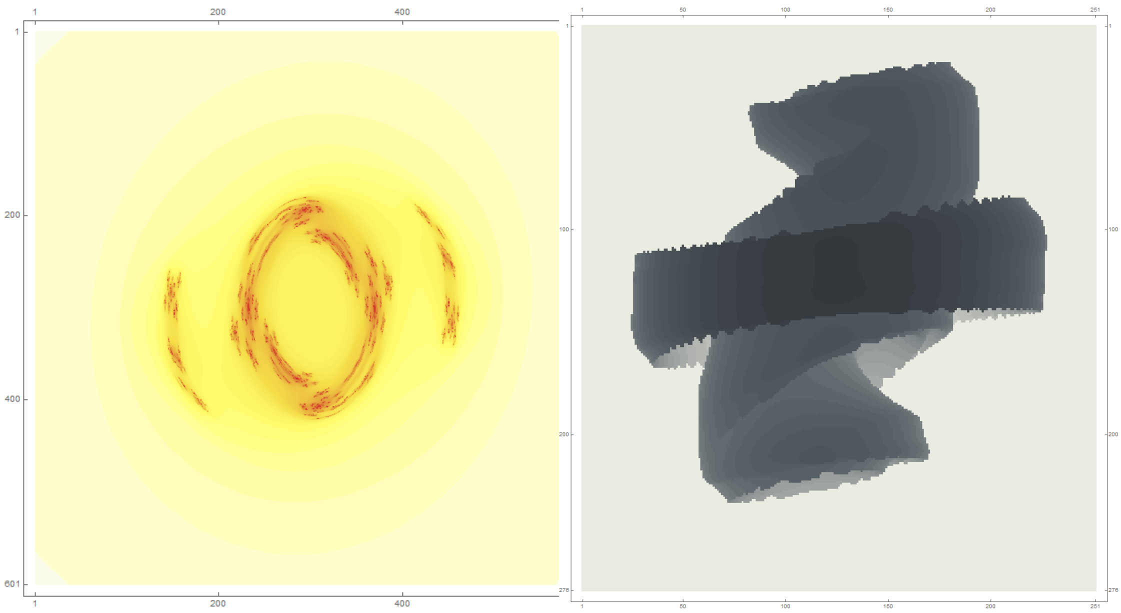
3 Shrnutí

Za pomoci softwaru Wolfram Mathematica jsme vygenerovali obrazy výše zmíněných fraktálních množin. Zajímavé bylo, když jsme se snažili zkonstruovat podobu čtyř-dimenzionálního fraktálu v tří-dimenzionálním lineárním podprostoru, kdy jsme hledali v každém bodě předem určené roviny všechny vektory kolmé na danou rovinu, pro něž měla být iterace koncového bodu nejvyšší, takové body tvořily okraj fraktálu.



(a) Mandelbrotova množina (b) Juliova množina, $d = -0.77 - 0.21i$

Obrázek 1: Komplexní fraktály



(a) 2D podprostor (b) 3D podprostor

Obrázek 2: Hyperkomplexní fraktály, $d = -0.45 + 0.24i - 0.52j + 0.36k$

Poděkování

Děkujeme FJFI ČVUT za poskytnutí zázemí, Ing. Josefu Schmidtovi za odborný dohled a týmu TV@J 2018 za organizaci akce.

Reference

[1] HAMILTON, William R., Sir. Elements of quaternions. London: Longmans, Green, & CO, 1866.

[2] MANDELBROT, Benoit B. The fractal geometry of nature. San Francisco: W.H. Freeman, 1982.

[3] PYTLÍČEK, Jiří. Lineární algebra a geometrie. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002.