Výpočet obsahu plošných obrazců metodou Monte Carlo

Karol Csukás[1], Petr Kolář[2], Michal Melko[3], Julie Přerovská[4]

[1]Gymnázium a SOŠ Plasy
csuky@seznam.cz

[2]Gymnázium Milevsko
kolda.efk@gmail.com

[3]Gymnázium Jána Chalupku, Brezno
mchlmelko@gmail.com

[4]Gymnázium Na Vítězné pláni, Praha
prerovska@gvp.cz

Abstrakt

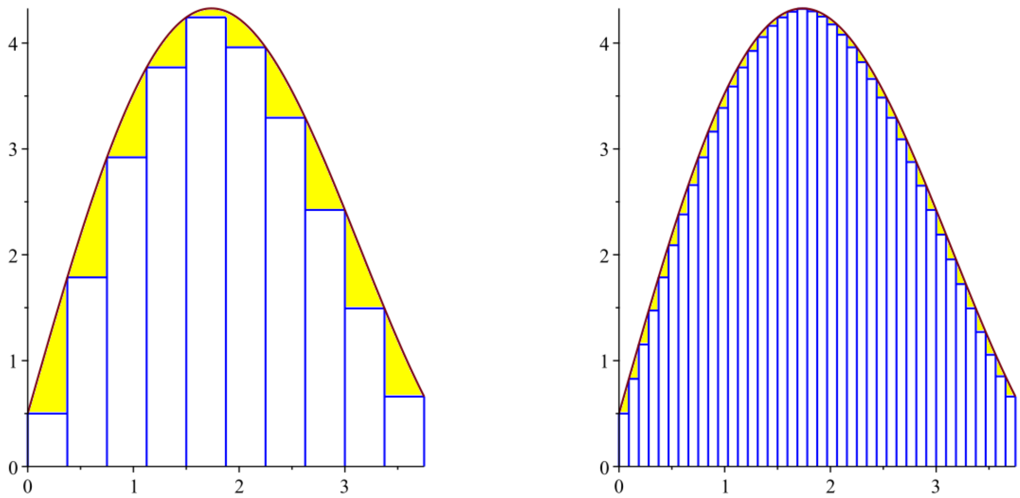
Cílem tohoto miniprojektu bylo zkoumat metodu Monte Carlo a její využití na výpočet obsahu plošných útvarů. Zaměřili jsme se na její výhody oproti jiným metodám a na její realizaci jsme využívali generátory pseudonáhodních čísel programovacích jazyků Python a Java.

1 Úvod

Zjišťování obsahů plochy obrazců, které známe již od základní školy, nám nedělá problém. Mohou to být různé kruhy, čtverce, kosodélníky a spousty dalších jednoduchých obrazců. Na výpočet používáme různé vzorce, které si umíme snadno odvodit. Když chceme spočítat obsah plochy nějakého neznámého tvaru, můžeme využít integrace, ale v případě, že máme např. implicitně zadanou funkci $(3x^2 - y^2)^2 y^2 - (x^2 + y^2)^4 = 0$, tak už jej tak snadno integrací nespočítáme.

Můžeme použít takzvanou obdélníkovou metodu, tj. celou oblast pod křivkou vyplníme obdélníky tak, že budou mít stejně dlouhou základnu a výška se bude rovnat funkční hodnotě v daném bodě. Součet obsahů všech těchto obdélníků nám pak dává přibližnou hodnotu obsahu plochy pod křivkou. Jak je vidět, tak při této metodě dochází k chybě. Tuto chybu můžeme minimalizovat zmenšováním základny proložených obdélníků, viz obrázek 1.

Ale i tato metoda značně zaostává za metodou Monte Carlo a to tím, že když chceme spočítat obsah plochy některého obrazce, u kterého neznáme explicitní předpis (tj. funkční závislost y na x), tak to obdélníkovou metodou tak snadno nepůjde. Další problém, ve kterém je metoda Monte Carlo výhodnější k použití, je počítání objemů vícedimenzionálních těles.



počet obdélníků = 10 počet obdélníků = 40

Obrázek 1: Obdélníková metoda – vizualizace chyby: Žluté části znázorňují chybu způsobenou neúplným vyplněním oblasti pod křivkou.

2 Postup

Celý postup výpočtu plochy metodou Monte Carlo [2] si můžeme vysvětlit na příkladu, kdy použijeme čtvercovou oblast a šipky, kterými se do čtverce budeme trefovat (to odpovídá generování náhodných bodů $X[x, y]$). Ve čtverci budeme počítat plochu pod zadanou křivkou. Hledaný obsah vypočteme jako součin poměru hodů trefených do prostoru pod křivkou ku všem hodům a obsahu obklopujícího čtverce. Tudiž odhad plochy pod křivkou získáme

$$S_{\text{pod křivkou}} = \frac{\#\text{bodů pod křivkou}}{\#\text{všech bodů}} S_{\text{čtverce}}. \tag{1}$$

3 Experimenty

3.1 Hodnota π

Jako první jsme se pokusili vypočítat hodnotu π. Pomocí generátoru pseudonáhodných čísel jsme náhodně vykreslovali body v jednotkovém čtverci opsaném čtvrtkružnici. Podle vzorce (1) pak vypočítáme obsah čtvrtkružnice s poloměrem 1, tj. hodnotu $\frac{\pi}{4}$. Vynásobeno čtyřmi nám dá hodnotu π. Se zvětšujícím se počtem bodů se zvětšuje také přesnost našeho odhadu, viz následující tabulka.

10	100	1000	10000	100000	1000000
3.1240	3.1492	3.1328	3.140688	3.141664	3.14198

3.2 Plocha pod $\sin^2(x)\cos^3(x)$

Na zjištění efektivnosti této metody jsme použili křivku, u které jsme si dokázali vypočítat přesnou hodnotu jí omezené plochy. Jde o křivku $f(x) = \sin^2(x)\cos^3(x)$ a hledanou plochu vypočítáme následovně

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 - t^4\,\mathrm{d}t =$$

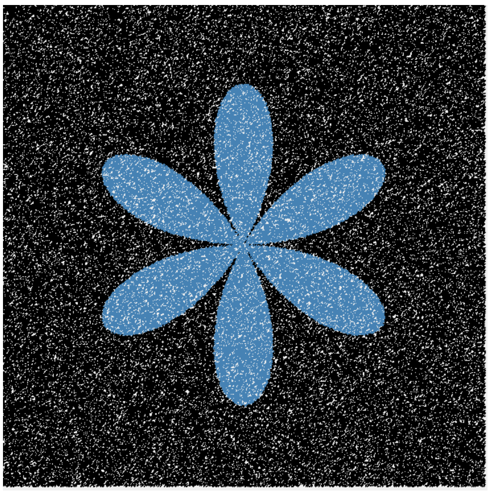
$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = 0.1\bar{3}.$$

S touto přesnou hodnotou budeme porovnávat naše vlastní spočítané hodnoty se závislostí na počtu realizací, tzn. vygenerovaných bodů.

# bodů	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
plocha	0.1099557	0.1341460	0.1311300	0.1337156	0.1334444	0.133339

3.3 Implicitně zadaná křivka

Na závěr jsme zkusili aplikovat tuto metodu na obrazec, u kterého není snadné spočítat jeho plochu. Jde o křivku určenou implicitně předpisem $(3x^2 - y^2)^2y^2 - (x^2 + y^2)^4 = 0$. Počítačem vygenerované body lze využít také k vykreslení tohoto obrace tak, že bodům ležícím vně dáme jinou barvu než těm uvnitř, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Výsledek simulace – body uvnitř jsou modré a body vně černé.

Tetokrát jsme kromě zvětšování přesnosti výpočtu plochy sledovali také odhad chyby. Odhad hledané plochy počítáme jako aritmetický průměr deseti opakování experimentu. Chybu odhadujeme pomocí směrodatné odchylky [3]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2},$$

kde N je počet měření, x_i výsledek i-tého měření a $\bar{x}$ aritmetický průměr. Je známo [1], že při Monte Carlo integraci směrodatná odchylka se vzrůstajícím N klesá jako $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Jak je vidět z posledního řádku následující tabulky, naše výsledky tomuto faktu vyhovují.

Počet realizací	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Měření 1	8.1000	7.6500	7.4790	7.4682	7.4245	7.4304	7.4301
Měření 2	8.1000	7.1100	7.4070	7.4466	7.4550	7.4368	7.4288
Měření 3	7.2000	7.4700	7.5870	7.4061	7.4332	7.4311	7.4273
Měření 4	7.2000	7.8300	7.5060	7.3989	7.4436	7.4298	7.4318
Měření 5	7.2000	7.2900	7.6230	7.4637	7.4292	7.4307	7.4307
Měření 6	6.3000	8.1900	7.4520	7.4799	7.4247	7.4309	7.4281
Měření 7	4.5000	7.8300	7.4970	7.4835	7.4335	7.4319	7.4296
Měření 8	7.2000	7.4700	7.3800	7.4385	7.4173	7.4245	7.4283
Měření 9	4.5000	7.6500	7.1820	7.4583	7.4316	7.4329	7.4298
Měření 10	6.3000	7.5600	7.2630	7.4295	7.4142	7.4285	7.4312
Arit. průměr	**6.6600**	**7.6050**	**7.4376**	**7.4473**	**7.4307**	**7.4308**	**7.4296**
Směr. odchylka	**1.2869**	**0.3037**	**0.1362**	**0.0291**	**0.0120**	**0.0031**	**0.0014**

4 Závěr

Závěrem bychom řekli, že metodou Monte Carlo můžeme řešit úlohy týkající se výpočtu obsahů plošných obrazců s velikou přesností, aniž bychom museli použít integrace. Naše experimenty ukázaly, že touto metodou jsme schopni vypočítat plochu libovolného obrazce ohraničeného křivkou.

Reference

[1] D. Edwards, *Monte Carlo Integration*, `http://www.cs.utah.edu/~edwards/research/mcIntegration.pdf`

[2] M. Virius, *Aplikace matematické statistiky – Metoda Monte Carlo*, Skriptum ČVUT (1998).

[3] J. Anděl, *Základy matematické statistiky*, MatfyzPress (2011).