

Počítačová simulace turbulentního proudění

V. Beran¹, J. Světlík², O. Tomášik³, D. Horský⁴

Masarykovo gymnázium Plzeň¹, Gymnázium Kolín², Gymnázium Tajovského B. Bystrica³
Gymnázium Jaroslava Heyrovského⁴

vit.beran@fykos.cz

19. června 2018

Abstrakt

Cílem naší práce bylo studium proudění nestlačitelné tekutiny v závislosti na rychlosti a viskozitě. Vlastnosti proudění jsme nejdříve zkoumali na jednoduchém modelu a později jsme přistoupili k simulaci zabývající se prouděním okolo pevné překážky. V závěru práce porovnáme výpočetní náročnost s použitím více jader procesoru.

1 Úvod

Proudění tekutin je běžný jev, jehož studiem se lidé zabývají již dlouhou dobu. Setkáváme se s ním především v průmyslových odvětvích jako je například obtékání křídel letadel, proudění vzduchu kolem karoserie aut, ale i v našem těle, kdy nás zajímá, jakým způsobem proudí krev v našem krevním řečišti. Snaha vědecké obce je jevy spojené s prouděním pochopit a využít je tak k našemu prospěchu.

2 Matematický popis proudění

Navierovy-Stokesovy rovnice

Před téměř dvěma stoletími zformulovali vědci C. L. Navier a G. G. Stokes soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic, s kterými byli schopni rozumně popsat jevy spojené s prouděním tekutin. Řešení těchto rovnic je stále otevřeným problémem, neb analytická řešení se stále nepodařila nalézt. Z tohoto důvodu musíme volit numerický přístup a řešit rovnice numerickými metodami. Rovnice popisující zachování hmoty a zachování hybnosti jsou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}) = \rho f_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{T}_{ji}}{\partial x_j},$$

kde ρ je hustota, \vec{v} rychlost proudění, \vec{f} označuje vnější síly a \mathcal{T} je tenzor napětí. Dále uvažujeme tenzor napětí pro Newtonovskou tekutinu. Ačkoliv jsme schopni rovnice řešit numericky, v některých případech je výhodné uvažovat nestlačitelnost tekutin. - to nám pak dovolí zapsat rovnice v jednodušším tvaru.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

Reynoldsovo číslo

Při studiu proudění můžeme měnit několik vstupních parametrů, které mají zásadní vliv na to, jak bude pravděpodobně spočítané proudění vypadat - konkrétně se jedná o vstupní rychlost proudění, viskozitu tekutiny a v neposlední řadě rozměr oblasti. Povahu proudění popisuje bezrozměrné Reynoldsovo číslo.

$$Re = d \frac{|\vec{v}|}{\nu},$$

kde d je charakteristická délka a ν je kinematická viskozita. Je-li Reynoldsovo číslo malé, proudění je laminární, v opačném případě vznikají turbulence. Přejímovou oblastí mezi těmito druhy proudění je přibližně $Re \approx 1000$.

3 Numerické simulace

Simulace fungují na následujícím principu. Uvažujeme oblast, ve které chceme zkoumat proudění dané tekutiny. Oblast potřebujeme diskretizovat - to provedeme tím způsobem, že ji pokryjeme mřížkou (pravidelnou či nepravidelnou). Diskretizovat musíme i čas, volíme tedy dostatečně malý časový krok, se kterým necháme soustavu se vyvíjet. V systému z prvních rovnic platí, že se nikde neztrácí ani negeneruje hmota. To znamená, že co do buňky sítě vteče, musí i vytéct. Při diskretizaci musíme myslet na to, že se změna během časového kroku nesmí rozšířit za hranici sousedních buňek, a proto musí diskretizační parametry (δt a δx) splňovat Courantův vztah $|\vec{v}| \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1$.

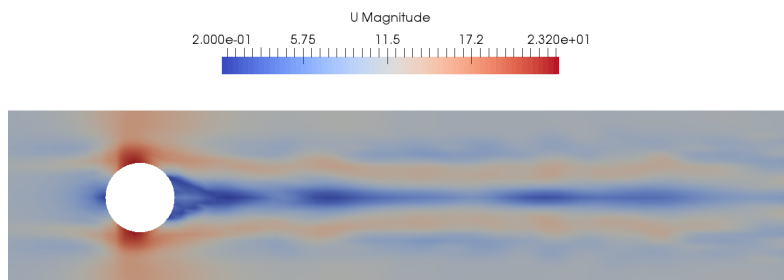
K simulacím jsme používali open-source program OpenFoam. Výsledky jsme vizualizovali pomocí programu ParaView.

4 Výsledky

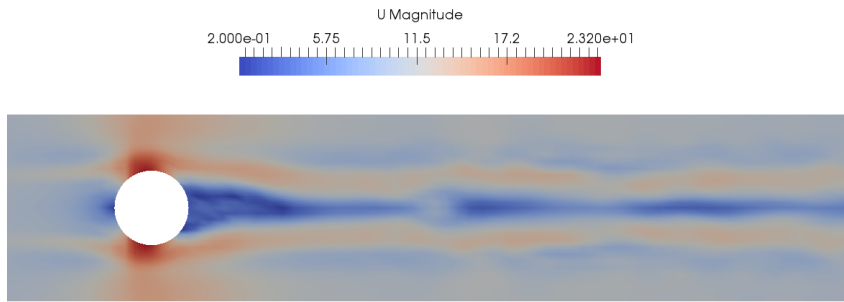
Simulace I.

Při první simulaci jsme uvažovali zjednodušený model trubky, ve které máme kruhovou překážku (2D řez). Měnili jsme parametry a zkoumali, jaký vliv, jaký vliv tyto změny měly na povahu proudění.

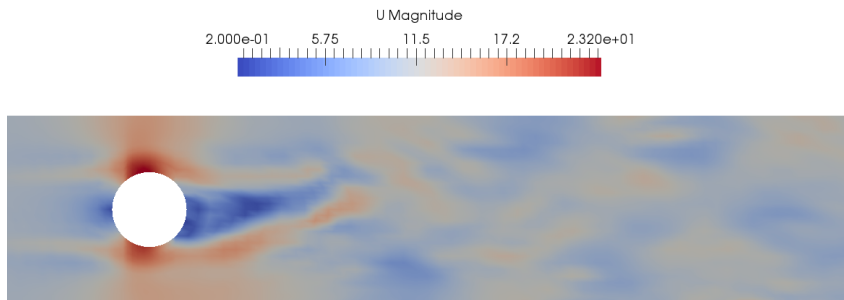
Proudění tekutiny (vzduch) v potrubí pro $\nu = 0.000017 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $T = 30^\circ \text{ C}$ a rychlostí proudění $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Poloměr překážky jest $r = 0.2 \text{ m}$, rozměry trubky jsou $3.0 \times 1.0 \text{ m}$. Pro tyto parametry je Reynoldsovo číslo $Re \doteq 200000$.



Obrázek 1: Velikost rychlosti v čase $t = 0.71 \text{ s}$.



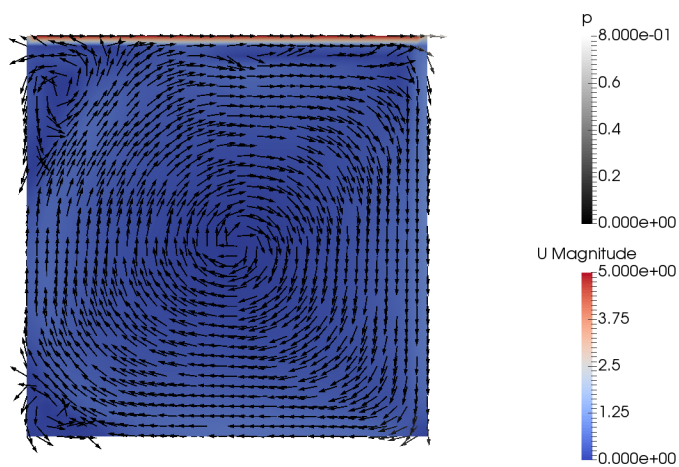
Obrázek 2: Velikost rychlosti v čase $t = 1.08$ s.



Obrázek 3: Velikost rychlosti v čase $t = 1.67$ s.

Simulace II.

Při druhé simulaci jsme zkoumali jednoduchou čtvercovou oblast, na jejíž horní hranu jsme nechali vtéct kapalinu ve směru osy x a zkoumali jak vypadá skalární tlakové pole a vektorové rychlostní pole pro různé hodnoty viskozity.



Obrázek 4: Jednoduchá čtvercová kavita, ustálený stav.

Paralelní výpočty

Jednotlivé oblasti mřížky jsme spočítali na 1, 2 či 4 jádrech procesoru. Jednotlivé části se spočítají rychleji, nicméně jádra spolu navzájem musí komunikovat, což může ve výsledku trvat déle. V tabulce níže jsou uvedeny výpočetní časy pro simulaci I. Počet elementů sítě byl 2600.

Porovnání efektivnosti			
Počet jader	Čas [s]	Urychlení	Efektivita
1	142.3	1.0	1.00
2	94.9	1.5	0.75
4	84.2	1.7	0.43

5 Závěr a shrnutí

Úspěšně se nám podařilo nasimulovat proudění ve čtvercové kavitě a proudění kolem kruhové překážky v potrubí. Získali jsme zkušenosti s programem OpenFOAM a zkoumali jsme efektivitu paralelních výpočtů. Zjistili jsme, že je nejvýhodnější při našich 4 jádrech použít rozdělení na všechna 4 jádra. Též se nám podařilo potvrdit teoretickou předpověď, pro naše vstupní parametry (odpovídající Reynoldsovo číslo $Re \approx 200000$) jsme zachytili turbulentní proudění.

Poděkování

Tímto chceme poděkovat našim supervizorům Ing. Jakubovi Solovskému a Ing. Jakubovi Klinkovskému za teoretický úvod do problematiky a pomoc při práci s programem OpenFOAM.

6 Reference

- [1] M. Feistauer: "Theory and Numerics for Problems of Fluid Dynamics," (2006).
- [2] OpenFoam Tutoriál, 2016 - <https://www.openfoam.com/documentation/tutorial-guide/>

7 Seznam použitých veličin

- ρ hustota
- \vec{v} rychlost proudění
- t čas
- \mathcal{T} tenzor napětí
- \vec{f} vnější síla
- p tlak
- ν kinematická viskozita