

Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace ve fyzice

1

J. Hájek, Gymnázium Jiřího Ortena, Kutná Hora
D. Miketa, Gymnázium, Nad Kavalírkou 1, Praha 5
J. Náplava, Gymnázium Uherské Hradiště

Abstrakt:

Moderní počítačová technika umožňuje efektivně vytvářet matematické modely i vizuální reprezentace fyzikálních dějů. Zaměřili jsme se na možnosti programu Wolfram Mathematica při řešení některých úloh z vlnové optiky.

1 Úvod

Počítačové algebraické systémy (CAS – computer algebra systems) umožňují rychlou a pohodlnou práci s algebraickými výrazy. S jejich pomocí lze automatizovat i náročnější úlohy, jako je hledání primitivní funkce. CAS se také často využívají k modelování fyzikálních situací.

2 Simulace

Pomocí komerčního CAS Wolfram Mathematica jsme simulovali difrakci vlnění na úzké obdélníkové štěrbině a na kruhovém otvoru. Pro šíření vln platí Huygensův princip – každý bod na čele šířící se vlny lze chápat jako nový zdroj vlnění. Díky této vlastnosti pozorujeme na překážkách, které narušují šíření vlnění, zajímavé jevy.

2.1 Difrakce

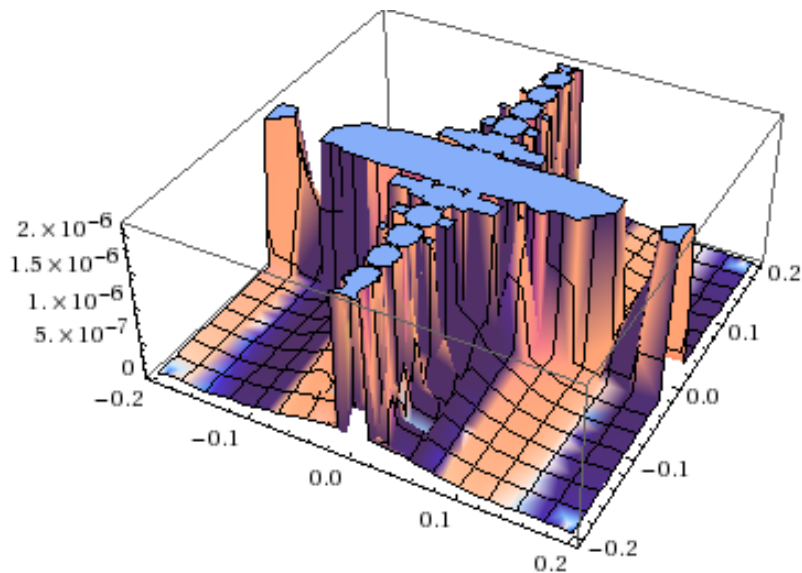
Při průchodu rovinné vlny štěrbinou dochází k Fraunhoferově difrakci. Vlnění se šíří i do oblasti geometrického stínu a vytváří komplikované obrazce. Nepřímočaré šíření lze vysvětlit Huygensovým principem, vznik obrazců pak plyne z periodicity vlnění. Simulovali jsme průchod vln obdélníkovým i kruhovým otvorem.

Pro obdélníkový otvor lze analyticky odvodit, že

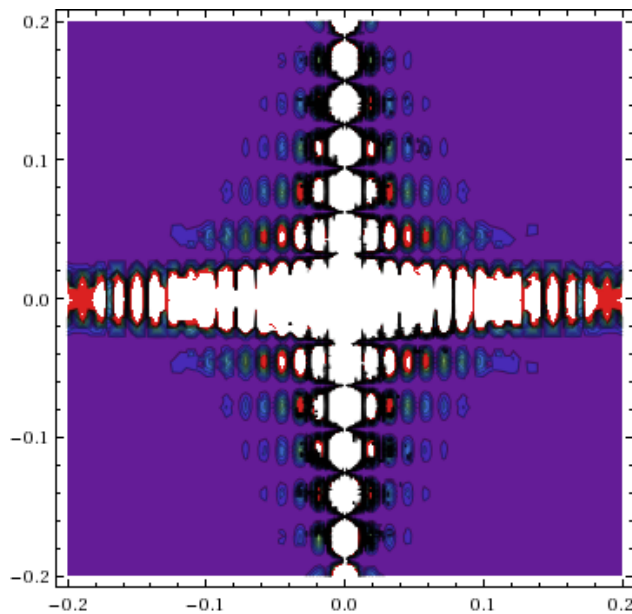
$$I(x, y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{D_x x}{\lambda d} \operatorname{sinc}^2 \frac{D_y y}{\lambda d},$$

kde I je intenzita vlnění na souřadnicích (x, y) desky, ve které je štěrbina, I_0 je maximální intenzita vlnění, λ je vlnovou délkou vlnění, D_x je šířkou a D_y výškou štěrbin.

CAS umožňují kromě jiného i vykreslování vícerozměrných funkcí několika různými způsoby. Kromě klasického trojrozměrného grafu, kde hodnotu funkce určuje výška bodu na daných souřadnicích, můžeme zobrazit rovinný graf, přičemž hodnotu funkce v daném bodě určuje barva.



Obrázek 1: 3D graf ohybu na obdélníkové štěrbině



Obrázek 2: Simulovaný pohled na obdélníkový otvor s barevně vyznačenou intenzitou

Abychom v CAS Wolfram Mathematica docílili tohoto efektu, zadefinovali jsme nejprve funkci *intensity*, která charakterizuje intenzitu vlnění v bodě. Funkce je proměnná v x , y a λ , takže budeme moci lehce pozorovat vliv vlnové délky na ohybový obrazec.

```

lambda = 550*10^-9
intensity0 = 1
Dx = 0.002
Dy = 0.0001
d = 0.1
intensity[x_, y_, lambda_] :=
intensity0*Sinc[x*Dx/(lambda*d)]^2*Sinc[y*Dy/(lambda*d)]^2

```

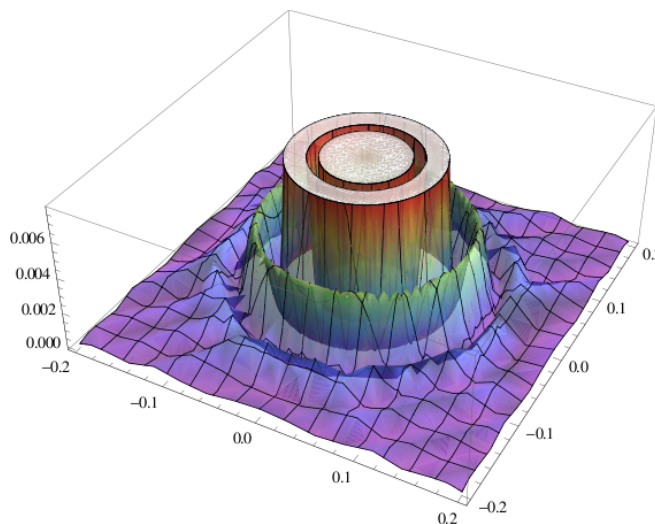
Kód 1: Zavedení funkce intenzity v sintaxi Mathematicy pro obdélníkový otvor

Vykreslování funkcí zajišťuje v Mathematice funkce `Plot[f(x), {x, xmin, xmax}`], respektive `Plot3D[]` pro trojrozměrné grafy a `ContourPlot[]` pro plošné barevné grafy. Příjemnými vlastnostmi tohoto CAS jsou snadné ukládání výsledných obrázků i celkově přehledné formátování, které kombinuje to nejlepší z programátory oblíbeného monospaced písma s typograficky vyspělejšími řezy a dynamickými vizuálními nápovědami, které významnou měrou urychlují hledání syntaktických chyb v kódu.

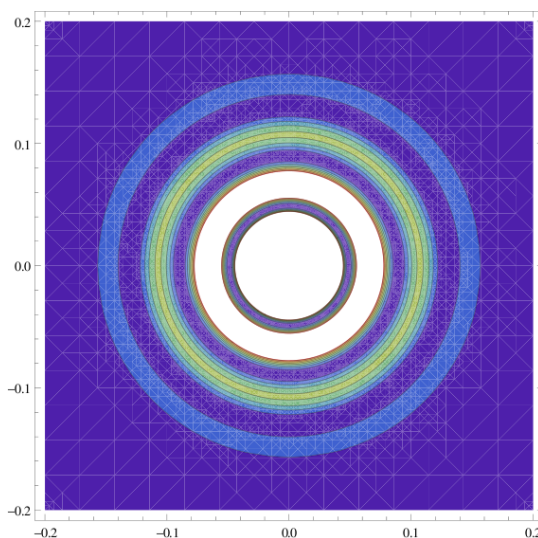
Zkoumali jsme i difrakci na kruhovém otvoru. V tomto případě je dána intenzita vzorcem

$$I(x, y) = I_0 \frac{2J_1(\pi D \rho / \lambda d)}{\pi D \rho / \lambda d}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

kde I_0 značí intenzitu vlnění, D je poloměr kruhu a $J_1(\cdot)$ Besselova funkce 1. řádu. Výsledný graf by měl mít dokonalou rotační symetrii, veškeré hrbolaté odchytky jsou tedy jen nepřesnostmi v numerickém výpočtu a algoritmu, který body spojuje v rovinu.



Obrázek 3: 3D graf ohybu na kruhové štěrbíně



Obrázek 4: Simulovaný pohled na kruhový otvor s barevně vyznačenou intenzitou

```
d = 0.01
intensity0 = 1
diameter = 0.003
intensityKruh[x_, y_, lambda_] :=
  intensity0*(2*
    BesselJ[1,
      Pi*diameter*Sqrt[x^2 + y^2]/(lambda*d)]/(Pi*diameter*
      Sqrt[x^2 + y^2]/(lambda*d)))^2
```

Kód 2: Zavedení funkce intenzity v syntaxi Mathematicy pro kruhový otvor

3 Shrnutí

Počítačové algebraické systémy jako Wolfram Mathematica mohou sloužit jako výkonná vizualizační pomůcka při řešení fyzikálních úloh i pro prezentační účely. Kromě statických grafů, které jsme využili v této práci, umožňují snadno vytvářet i interaktivní applety. V optických úlohách nacházejí CAS bohaté uplatnění a v mnoha případech je vhodnější provést místo experimentu raději počítačovou simulaci.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat Dr. Ing. Milanu Šiňorovi za trpělivou a ochotnou pomoc při vedení našeho příspěvku, organizátorům Týdne vědy na Jaderce a Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT.

Reference

- [1] SALEH B. E. A. - TEICH M. C. *Základy fotoniky* MATFYZPRESS 1994
- [2] WOLFRAM S. *The Mathematica Book* Wolfram Media/Cambridge University Press 1999
- [3] REICHL, J. - VŠETIČKA M. *Mathematica - fórum: Materiály* <http://www.mathematica-forum.cz/materialy.htm>
- [4] RŮZNÍ AUTOŘI *Wolfram Demonstrations Project* <http://demonstrations.wolfram.com/>
- [5] RŮZNÍ AUTOŘI *Wikipedie: Difrakce* <http://cs.wikipedia.org/wiki/Difrakce>