Ramseyova teorie aneb příklady, které jsou pro počítač moc složité

Aranka Hrušková, Vladislav Matúš, Jakub Schusser,
Eduard Šubert, Martin Töpfer
Gymnázium Christiana Dopplera, Gymnázium Českolipská 373,
Gymnázium Broumov, Gymnázium Turnov, Gymnázium Nad Štolou
umim.cist@gmail.com, vladislav.matus@seznam.cz, schusserj@seznam.cz,
edasubert@gmail.com, mtopfer@gmail.com

Abstrakt

Ramseyova teorie se zabývá příklady, které hledají nejmenší možný počet prvků zaručující danou vlastnost. Patří mezi ně např. Party Problem, Happy End Problem nebo Van der Waerden Problem. Pro počítače jsou příklady z dané oblasti značně časově náročné, ale úvahou lze výsledku dosáhnout leckdy za pár vteřin. Ramseyovu teorii velmi rozvinul maďarský matematik Pál Erdős.

1 Ramseyova teorie

F. P. Ramsey (1903 – 1930) byl britský matematik a filozof, který i navzdory faktu, že zemřel v pouhých 26 letech, publikoval mnoho článků zabývajících se kombinatorikou, pravděpodobností, matematickou ekonomií a mimo jiné vymyslel Ramseyův teorém (zjednodušeně: absolutní chaos není možný).

Ramseyova teorie se zabývá hledáním nejmenšího počtu prvků, které garantují danou vlastnost. Nejlépe tuto teorii pochopíme demonstrací na následujících 2 příkladech.

Příklad 1. *Vybereme- li z čísel* $1, 2, 3, \dots 2n$ *libovolně* $n + 1$ *čísel, pak mezi nimi vždy najdeme* 2 *čísla nesoudělná. Vybrat n čísel nestačí.*

Vysvětlení. Vždy, když vybereme $n + 1$ prvků, objeví se mezi nimi 2 po sobě jdoucí čísla a ta nejsou soudělná. Pokud ale vybereme pouze n prvků, může nastat situace, kdy vybereme např. n sudých čísel, která budou vždy po dvojicích soudělná. □

Příklad 2. *Vezmi prvních* 101 *přirozených čísel a uspořádej je libovolně. Pak vždy najdeš rostoucí nebo klesající posloupnost* 11 *čísel. (Prvních* 100 *čísel nestačí.)*

Vysvětlení. K dokázání, že 100 prvků nestačí, si čísla uspořádáme ve tvaru

$$91, 92, 93, \dots, 100; 81, 82, 83, \dots 90; \dots\dots, 11, 12, 13 \dots 20; 1, 2, 3, \dots 10.$$

Čtenář si rozmyslí, že v takovémto uspořádání nenajdeme ani klesající, ani rostoucí posloupnost 11ti čísel.

□

2 Van der Waerdenův problém

B. L. van der Waerden (1903 – 1996) byl holandský matematik, který se věnoval především abstraktní algebře. Ve svém díle *Algebra* byl první, kdo obsáhl toto téma jako celek. Jeho jméno bude navždy zapamatováno díky Van der Waerdenovu testu, číslu a teorému, který spadá do Ramseyovy teorie.

2.1 Van der Waerdenův teorém

Věta 1. *Pro každé $r, k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pokud čísla $\{1, 2, \dots, N\}$ obarvíme náhodně každé jednou z r různých barev, pak můžeme vybrat k monochromatických členů aritmetické posloupnosti. Nejmenší možné N určuje Van der Waerdenovo číslo $W(r, k)$.*

V našem případě jsme řešili problém pro $r = 2, k = 3$, tedy hledali jsme nejmenší počet prvních přirozených čísel, ve kterých po obarvení dvěma barvami nalezneme tři členy aritmetické posloupnosti.

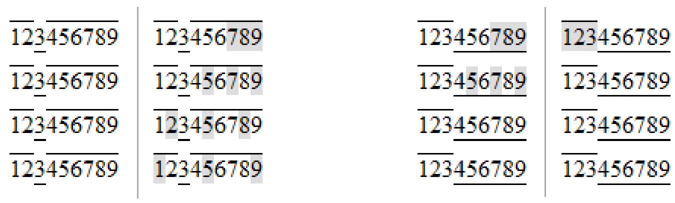
Přijdeme na to, že $N = 8$ je málo, protože můžeme barvit například následovně:

$$\underline{1}\overline{23}\underline{45}\overline{67}\underline{8}$$

Pokud přidáme deváté číslo, tak při jeho libovolném obarvení najdeme 3 členy aritmetické posloupnosti. Důkaz provedeme buď „hrubou silou“ (prozkoumáním všech možností), nebo matematicky.

2.2 Důkaz „hrubou silou“

Všechny možnosti jsme procházeli počítačovým programem napsaném v C++, Mathematica a PHP.



Obrázek 1: Dvě ukázky výstupu z programu. Barevné rozlišení je reprezentováno podtržením a nadtržením. V prvním sloupci jsou posloupnosti nalezené v podtržených, ve druhém v nadtržených. Po řádcích se zvyšuje diference.

2.3 Matematický důkaz

V tomto případě zkoušíme čísla vybarvovat od středu číselné řady (5). Pro zjednodušení jsme místo čísel použili písmena a a b symbolizující jednotlivé barvy. Tečky znázorňují volná místa. Začneme tím, že číslo pět obarvíme bez újmy na obecnosti barvou a - následuje pět možností dalšího obarvování, z nichž jednu jsme znázornili níže a zbylé naznačili. Každé další obarvení pole zabraňuje vzniku aritmetické řady. Nakonec však vznikne pole, kam nelze doplnit ani a ani b - to je označeno *!!!*.

Postup vyplnění

1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	.	a	a	.	.	.	.
.	.	b	a	a	b	.	.	.
.	.	b	a	a	b	.	.	a
.	.	b	a	a	b	b	!!!	a

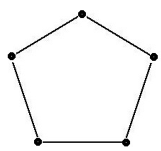
Ostatní možnosti začátku

1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	a	b	a	.	.	.	.
.	a	b	b	a	.	.	.	.
a	b	b	b	a	.	.	.	.
b	b	b	b	a	.	.	.	.

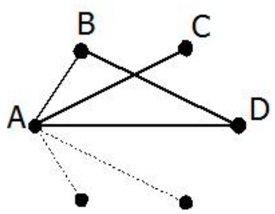
3 Party Problem

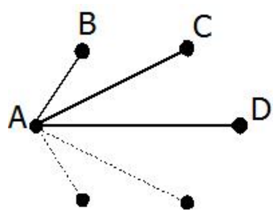
Dalším známým problémem, na který lze Ramseyovu teorii použít, je Party Problem. Cílem je najít nejmenší počet lidí, kteří se musí účastnit večírku, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje trojice, kde každý zná každého, nebo existuje trojice, kde nikdo nezná nikoho. Abychom mohli tento problém matematicky snadno popsat, celou situaci budeme reprezentovat grafem. Vrcholy grafu představují hosty a hrana mezi dvěma vrcholy znamená, že se daní dva lidé znají. Nyní můžeme přeformulovat úlohu na hledání minimálního počtu vrcholů grafu tak, abychom měli jistotu, že se v grafu budou nacházet tři navzájem propojené vrcholy nebo tři vrcholy, mezi nimiž nebude žádná hrana.

Následující obrázek ukazuje, že pět lidí nestačí:



Na grafu o šesti vrcholech už ale dokážeme, že podmínku naší úlohy vždy splňuje. Z libovolného vrcholu (označme jej A) vedou alespoň tři hrany, nebo existují alespoň tři vrcholy, se kterými vrchol A spojen hranou není. Bez újmy na obecnosti proto uvažujme, že z daného vrcholu vedou tři hrany. Označme vrcholy spojené s vrcholem A jako B, C a D. Pokud by existovala hrana mezi některými dvěma těmito vrcholy, tvořily by s vrcholem A trojici navzájem propojených vrcholů a tvrzení by platilo. Pokud mezi B, C a D není žádná hrana, tvoří tyto vrcholy hledanou trojici nepropojených vrcholů.





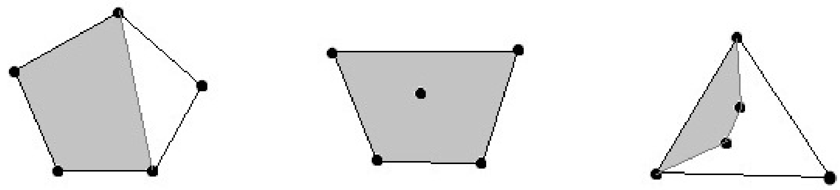
Důkaz, že všechny grafy na šesti vrcholech vyhovují podmínce Party Problemu můžeme provést také pomocí počítače otestováním všech možných grafů na šesti vrcholech. Pokud program nebudeme nijak optimalizovat a budeme uvažovat všechny grafy včetně těch, které jsou navzájem izomorfní, budeme muset otestovat $2^{15} = 32768$ grafů. Výpočet našeho programu napsaného v prostředí Wolfram Mathematica trval přibližně 25 minut.

Zobecněním úlohy Party Problem je situace, kdy hledáme nejmenší počet lidí, kteří se musí účastnit večírku, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje n-tice, kde každý zná každého, nebo existuje n-tice, kde nikdo nezná nikoho. Pokud bychom se snažili řešit tento problém hrubou silou bez jakékoli optimalizace, museli bychom ozkoušet $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ grafů. Exponenciální časová složitost programu je důvodem, proč přesná mez dostačujícího počtu lidí pro vyšší n není známá. Pro $n = 4$ je potřeba minimálně 18 lidí na večírku, ale pro vyšší n známe jen horní a dolní odhady.

4 Happy End Problem

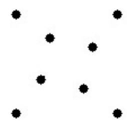
Happy End Problem byl zformulován ve třicátých letech minulého století. Jako první s ním přišla matematička Esther Klein. Ta položila otázku, kolik bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce, je minimálně potřeba, aby některé z nich vždy tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Sama si odpověděla a následně se začal zkoumat stejný problém pro pětiúhelník i obecně pro n-úhelník.

Nejmenší počet bodů pro čtyřúhelník je 5, což Ester dokázala pomocí tzv. konvexních obalů (tj. konvexní n-úhelník zahrnující všechny dané body):



Každých pět bodů v rovině lze uzavřít buď do konvexního pětiúhelníku, čtyřúhelníku, nebo trojúhelníku. Pokud vybereme libovolné čtyři body z pětiúhelníku, vytvoří konvexní čtyřúhelník a u čtyřúhelníku jsou hledanými body čtyři krajní. V trojúhelníku spojíme dva vnitřní body přímkou, která nám rozdělí rovinu na dvě poloroviny - víme, že v jedné se nachází jeden vrchol trojúhelníku a v druhé dva. Spojíme-li dva vnitřní body s dvěma vrcholy trojúhelníku ležícími ve stejné polorovině, získáme konvexní čtyřúhelník.

Obdobně najdeme výsledek i pro pětiúhelník, kde je minimální počet bodů devět. Jeden z případů, kdy osm nestačí:



Vzápětí po vyslovení problému přišel matematik György Szekeres s obecným řešením; s počtem bodů $N(n)$, které zajistí existenci konvexního n-úhelníku. Esther Klein tím tak uchvátil, že získal její ruku - od té doby se tomuto problému přezdívá Happy End Problem. Posléze byla vyslovena přesnější hypotéza, že pro n-úhelník je minimální počet bodů $2^{n-2} + 1$, ta však ještě nebyla potvrzena.

5 Pál Erdős a Ramseyova teorie

Pál Erdős se narodil roku 1913 v Budapešti v rodině matematiků. Již jako dítě jevil známky geniality, ve čtyřech letech ovládal záporná čísla a v deseti byl okouzlen Eukleidovým důkazem nekonečnosti prvočísel, který mu ukázal jeho otec - tehdy se malý Pál rozhodl, že se stane matematikem. Své tituly získal velice brzy, všechny za důkazy týkající se prvočísel. Během svého života napsal Erdős rekordní počet článků. Protože měl kromě velkého množství publikací i obrovský počet spoluautorů, bylo na jeho počest definováno Erdősovo číslo. On sám má číslo 0, každý jeho spoluautor 1, spoluautor spoluautora 2 atd.

Pál Erdős také hledal „Zázračné děti". Jedním z nich byl např. Lájos Pósa, kterého si Erdős prověřil Příkladem 1. Lájos ho během chvilky vyřešil a díky tomu byl Erdősem přizván ke spolupráci.

Tento matematik ze svých životních zkušeností usoudil, že Bůh rozhodně nemůže být dobrý a přezdíval mu Supreme Fascist (SF). Krom toho tvrdil, že SF má Knihu (The Book), která obsahuje jen ty nejhezčí důkazy. Největší pochvalou tedy bylo, když o vašem důkazu prohlásil: "It's straight from the Book."

O Erdősovi se ale zmiňujeme proto, že jeho oblíbeným odvětvím matematiky byla právě Ramseyova teorie, kterou rozvinul a zpopularizoval.

6 Závěr

Během našeho miniprojektu jsme se postupně seznámili s Ramseyovou teorií, Van der Waerdenovým problémem, Happy end problémem a Party problémem. Dále jsme se dozvěděli několik zajímavých faktů o životě Pála Erdőse a jeho vědecké práci. Nakonec jsme si některé z výsledků ověřili naprogramováním v různých jazycích, čímž se potvrdilo, že některé úlohy jsou pro počítač opravdu složité a počítači zaberou hodně času, zatímco jejich matematický důkaz je krátký a elegantní.

Poděkování

Děkujeme FJFI ČVUT za umožnění realizace a Ing. Ľubomíře Balkové, Ph.D. za dohled, uvedení do problému a výraznou pomoc s miniprojektem.

Reference

[1] Graham R. L., Spencer J. H. *Ramsey Theory.* Scientific American (1990), 112–117.

[2] Csicsery G.-P. *N Is a Number: A Portrait of Paul Erdös.* DVD, Springer, Berlin, 1999.

[3] Hoffman P. *The Man Who Loved Only Numbers.* The Story of Paul Erdös and the Search for Mathematical Truth. Hyperion, New York, 1998.

[4] Schechter B. *My brain is open: The mathematical journeys of Paul Erdös.* Simon & Schuster, New York, 2000.