

Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace ve fyzice

P. Dvořák, P. Hrubcová, T. Chvosta, D. Pecl
FJFI ČVUT, Trojanova 13, Praha 2
petra.hrubcova@gmail.com

Abstrakt:

Cílem našeho miniprojektu bylo seznámit se s některými typickými představiteli počítačových algebraických systémů (CAS) a naučit se je používat při vizualizaci dat a při řešení některých jednoduchých i složitějších fyzikálních úloh. Výhody CAS spočívají v algebraických výpočtech, což umožňuje dosáhnout přesných výsledků. Naše práce ukazuje některé možnosti využití těchto počítačových systémů. Nutno dodat, že CAS skrývají mnohem víc, než jsme byli schopni během našeho miniprojektu objevit.

1 Úvod

Většina vědeckých prací a problémů se v dnešní době řeší na počítačích, díky kterým je práce značně usnadněna a urychlena. Výběr počítačových systémů je nepřeborný. Čím se však algebraické počítačové systémy liší od ostatních je způsob zpracování dat. V ostatních systémech často dochází k zaokrouhlování a nebo dokáží počítat pouze s konkrétními příklady. Toto může ovlivnit výsledky značným způsobem, proto v těchto situacích přicházejí na řadu CAS. Tyto systémy počítají s algebraickými výrazy a čísla dosazují až dodatečně, což nám umožňuje dosáhnout přesných výsledků. Mezi další výhody také patří vizualizace dat do 3D grafiky.

Než se dostaneme k naší samotné práci, je třeba si něco říci, co to vlastně Počítačové algebraické systémy jsou. CAS (z anglického: Computer algebra system) označuje systémy pro počítačové zpracování symbolických matematických výrazů. Tyto programy se vyvinuly ze specializovaných matematických programových balíčků pro superpočítače, dnes je však najdeme na osobních počítačích a dokonce i na některých typech vědeckých kalkulátorů.

CAS začaly vznikat z důvodu potřeby řešit náročné matematické úlohy, které bylo velice obtížné až téměř nemožné vyřešit bez použití počítače. Zpočátku byly určeny pro nejvýkonnější počítače, v současné době nalezneme tyto systémy i na mobilních telefonech. Vývoj těchto systému započal v 60. letech díky pozdějšímu laureátovi Nobelovy ceny Martinu Veltmanovi, který vytvořil první program pro symbolické výpočty. Na Veltmana navázal Carl Englemann, jenž vytvořil první volně šiřitelný algebraický software pro počítače.

V současné době se můžeme setkat se dvěma hlavními skupinami CAS programů:

- programy převážně určené pro numerické výpočty – do této skupiny patří například komerční program MATLAB nebo free programy Scilab, GNU Octave nebo RLab;
- programy převážně určené pro symbolické výpočty – do této skupiny řadíme komerční programy Mathematica a Maple, z free programů především program Maxima.

2 Mathematica

Jednoznačně největší pozornost jsme věnovali programu Mathematica, který je v dnešní době jeden z nejrozšířenějších algebraických systémů. Tento program si nyní podrobněji představíme.

Program byl původně vytvořen Stephenem Wolframem a následně vyvíjen týmem matematiků a programátorů, který vytvořil a vede. Je prodáván firmou Wolfram Research se sídlem v Champaign, Illinois. Mathematica je rozdělena do dvou částí – jádra a front endu. Jádro interpretuje výrazy a vrací výsledky. Front end poskytuje GUI (grafické uživatelské rozhraní), ve kterém výsledky vhodně zobrazuje. Nejnovější Mathematica s číslem 9 je dostupná pro 3 velké platformy - Microsoft Windows, MacOS X, Linux.

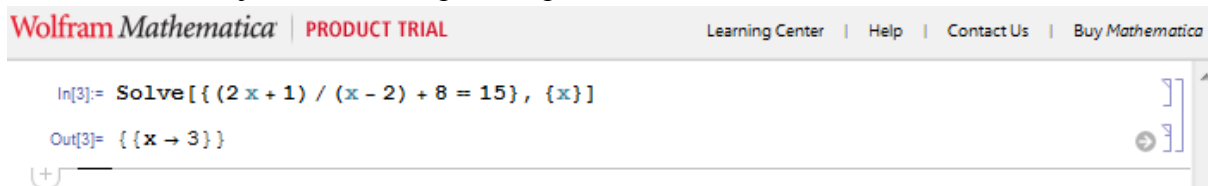
Mathematica umí nejen běžné výpočty, ale i zobrazování grafů funkcí, symbolické počítání (úpravy algebraických výrazů, řešení rovnic, derivace, integrály, atd.) či animované simulace (jako například grafy goniometrických funkcí a kmitání oscilátorů, atd.).

Hlavními nevýhodami tohoto programu je placená licence a nutnost najít odpovídající příkazy v angličtině. K usnadnění však slouží přehledná nápověda.

3 Příklady z praxe

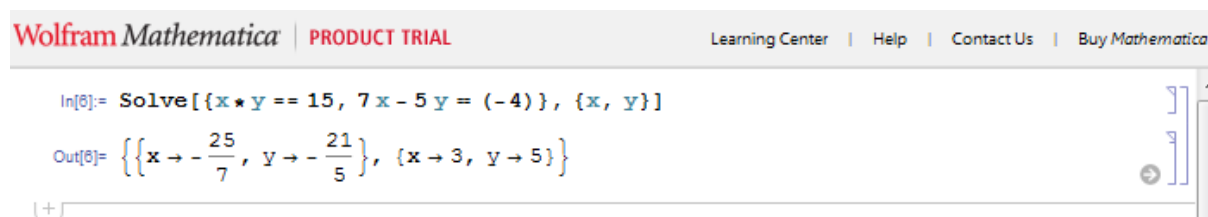
Mathematica umožňuje řešit projekty libovolného rozsahu a my jsme pochopitelně začali s rutinními výpočty, od kterých jsme se dostali ke složitějším.

Řešení rovnice o jedné neznámé pomocí příkazu solve:



```
Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL | Learning Center | Help | Contact Us | Buy Mathematica  
In[3]:= Solve[{(2 x + 1) / (x - 2) + 8 = 15}, {x}]  
Out[3]:= {{x -> 3}}
```

Řešení dvou rovnic o dvou neznámých:



```
Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL | Learning Center | Help | Contact Us | Buy Mathematica  
In[8]:= Solve[{x * y == 15, 7 x - 5 y == (-4)}, {x, y}]  
Out[8]:= {{x -> -25/7, y -> -21/5}, {x -> 3, y -> 5}}
```

Obecné řešení rovnice vyššího řádu:

Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL Learning Center | Help | Contact Us | Buy Mathematica

```
In[11]:= Solve[{a*x^3 + b*x^2 + c*x + d == 0}, {x}]
```

Out[11]=
$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} - \frac{2^{1/3}(-b^2 + 3ac)}{3a \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 - 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3}} + \frac{-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 - 9abc - 27a^2d)^2}}{3 \times 2^{1/3} a} \right\}^{1/3}, \right.$$

$$\left. \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{4} \left(3 \times 2^{2/3} a \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 - 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} - \frac{1}{6 \times 2^{1/3} a} (1 - i\sqrt{3}) \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 - 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} \right) \right\}^{1/3}, \right.$$

$$\left. \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{4} \left(3 \times 2^{2/3} a \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 - 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} - \frac{1}{6 \times 2^{1/3} a} (1 + i\sqrt{3}) \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 - 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} \right) \right\} \right\}$$

Rozšíření výrazu pomocí funkce Expand:

Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL Learning Center | Help | Contact Us | Buy Mathematica

```
In[2]:= Expand[{(a + b + c)^3}]
```

Out[2]=
$$\{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3\}$$

Zjednodušení výrazu pomocí funkce Simplify:

Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL

```
In[10]:= Simplify[a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8]
```

Out[10]=
$$(a + b)^8$$

Rozepsání výrazu v závislosti s měnicí se proměnou pomocí příkazu Manipulate:

Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL

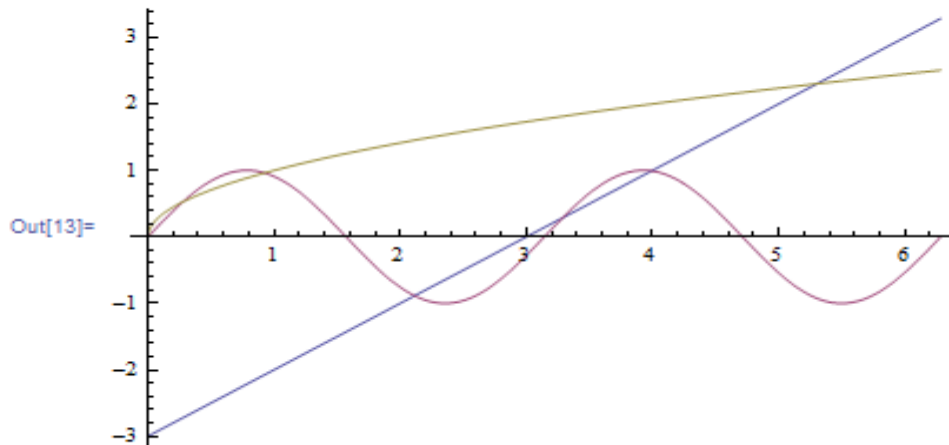
```
In[8]:= Manipulate[Expand[{(a + b)^x}], {x, 1, 1000, 1}]
```

Out[8]=
$$\{a^{12} + 12a^{11}b + 66a^{10}b^2 + 220a^9b^3 + 495a^8b^4 + 792a^7b^5 + 924a^6b^6 + 792a^5b^7 + 495a^4b^8 + 220a^3b^9 + 66a^2b^{10} + 12ab^{11} + b^{12}\}$$

Vytváření jednoduchých grafů

Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL

```
In[13]:= Plot[{x - 3, Sin[2 x], x^0.5}, {x, 0, 2 Pi}]
```

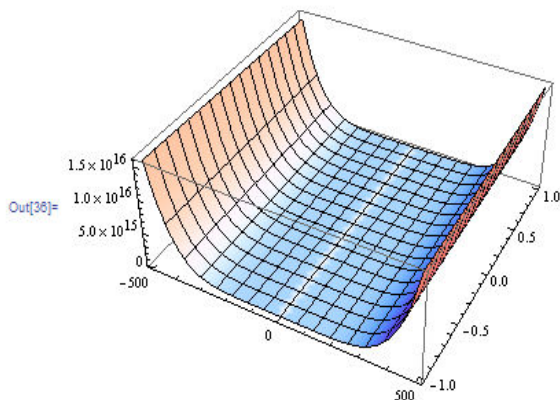


Vytváření 3D grafiky

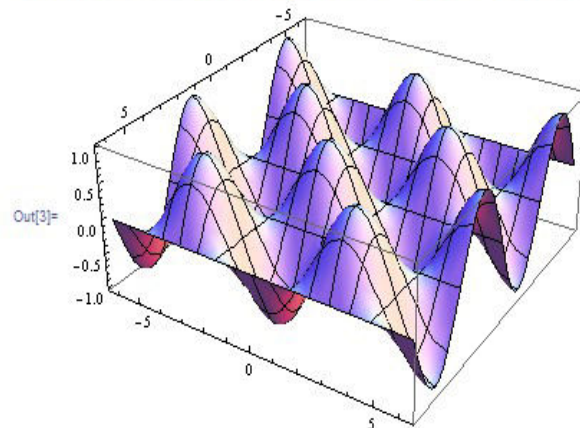
Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL

Wolfram Mathematica | PRODUCT TRIAL

```
In[38]:= Plot3D[{(x + y)^6}, {x, -500, 500}, {y, -1, 1}]
```



```
In[3]= Plot3D[{Sin[x] * Cos[y]}, {x, -2 Pi, 2 Pi}, {y, -2 Pi, 2 Pi}]
```



4 Shrnutí

V dnešní době rychlého pokroku vědy jsou CAS něčím, bez čeho se neobejdeme, proto je dobré osvojit si některé základy ještě předtím, než je budeme potřebovat. Zvládnutí základů těchto programů je jednodušší, než se zdá - oproti běžným programovacím jazykům je struktura v CAS přehlednější a i zápis je kratší. Možnosti použití těchto programů jsou obrovské a výsledky dodají každé vědecké práci hned lepší úroveň. Během doby trvání miniprojektu jsme se seznámili pouze se základními funkcemi, CAS však skrývají řadu možností, které jsou možným předmětem dalšího „zkoumání a objevování“.

5 Poděkování

Děkujeme všem organizátorům akce Týden vědy na Jaderce a především děkujeme Dr. Ing. Milanu Šiňorovi, který nás seznámil s problematikou CAS a pomáhal nám při tvorbě miniprojektů.

Reference

<http://www.wolfram.com/mathematica/>

<http://user.mendelu.cz/navratil/akademie/objects/CAS.pdf>

<http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/ca/node1.html>

http://cs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8D%C3%ADta%C4%8Dov%C3%BD_algebraick%C3%BD_syst%C3%A9m

http://pl.wikipedia.org/wiki/System_algebry_komputerowej

http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra_system