

Matematický model vzniku skvrn na kožichu jaguára

M. Dohnalová – Gymnázium Nad Kavalírkou, Praha

J. Dostál – Slovanské gymnázium Olomouc, Olomouc

M. Scheubrein – Gymnázium Třebíč, Třebíč

J. Štěpanovský – Gymnázium Třebíč, Třebíč

Abstrakt

Turingův model popisuje vznik prostorových struktur z malé perturbace konstantní počáteční podmínky. Pomocí něj můžeme generovat obrázky skvrn na kožích jaguárů a žiraf, pruhů na zebrách nebo obrazců na kůži akvariálních rybek. Cílem této práce je pozorovat chování Turingova modelu na obdélníku a kulové ploše a porovnat struktury vytvořené tímto modelem s různými počátečními podmínkami a parametry.

1 Úvod

Na první pohled chaotické rozmístění skvrn na srsti zvířat lze popsat Turingovým modelem. Jde o soustavu parciálních diferenciálních rovnic popisujících časový vývoj dvou veličin, které mohou reprezentovat například koncentraci pigmentu na kožichu jaguára. Vznikající struktury vykazují zajímavé vlastnosti, například symetrii. Výsledný tvar závisí na volbě počátečních podmínek a parametrů, které mohou představovat například difuzní poměr. Turingův model však dokáže popsat i další jevy v přírodě, například vaskularizaci rakovinných buněk nebo dynamiku v nukleárních reaktorech.

Naše práce se zabývá studiem změn struktur v závislosti na volbě parametrů a počátečních podmínek. Dále se pokusíme vyvinout algoritmus na zjištění počtu skvrn na sféře. Výsledná data zhodnotíme a porovnáme s rovinným modelem.

2 Turingův model

Jedná se o soustavu parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \nabla^2 v + g(u, v),\end{aligned}$$

kde proměnné jsou dvě funkce u, v závislé na prostoru a čase. Parametry d_1, d_2 mohou představovat difuzní konstanty, druhá mocnina operátoru ∇ (nabla) prostorovou derivaci. Tato soustava má analytické řešení pouze ve velmi speciálních případech, proto ji většinou řešíme numericky. Právě touto cestou jsme se vydali i my.

Při naší práci jsme vycházeli z článku [1], který uvažuje konkrétní funkce f , g , tedy předchozí systém je při převzetí značení ve tvaru

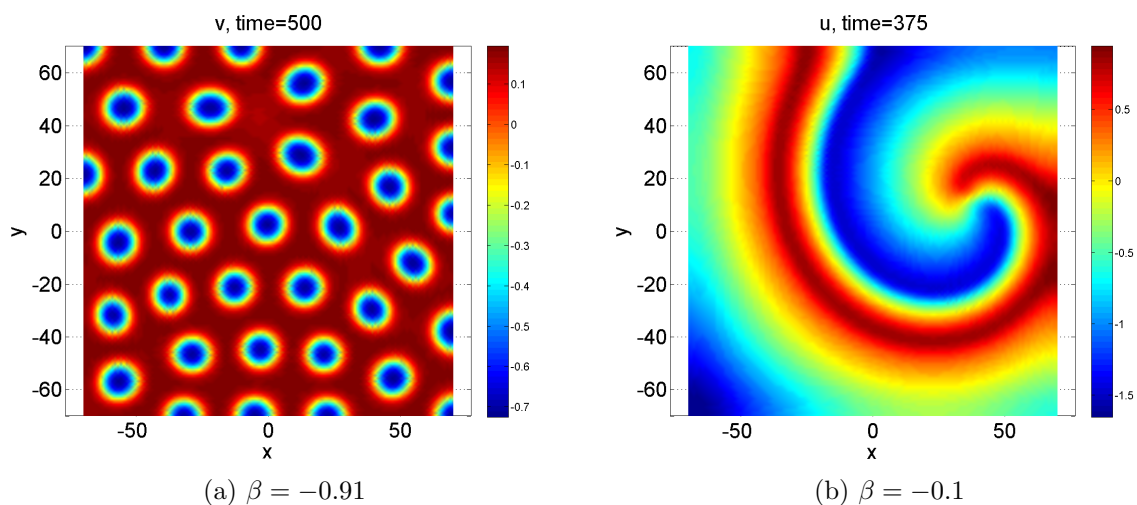
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\delta\nabla^2 u + \alpha u + v - r_2 uv - \alpha r_3 uv^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \delta\nabla^2 v + \gamma u + \beta v + r_2 uv + \alpha r_3 uv^2$$

Parametry této rovnice, dle kterých budeme zkoumat vývoj a výsledný stav systému, jsou α , β , γ , r_2 , r_3 , D , δ .

3 Vývoj na obdélníku

Model jsme využili k vytvoření struktur na ploše obdélníku tvořeného konečným počtem bodů. Soustava nemá analytické řešení, proto jej hledáme numericky v programu Matlab. Na obdélníku musíme zavést speciální podmínky pro chování skvrn při okrajích obdélníka, které výrazně ovlivňují počet vzniknuvších skvrn. Ten ve většině případů konverguje k jisté hodnotě, která se dále v čase už nemění. Skvrny potom jen drobně mění svou vzájemnou pozici. Zjišťovali jsme, jaký vliv mají parametry na vývoj a konečný stav struktur. Vhodnou volbou parametrů dosáhli struktur vzhledově podobným přírodním vzorům.



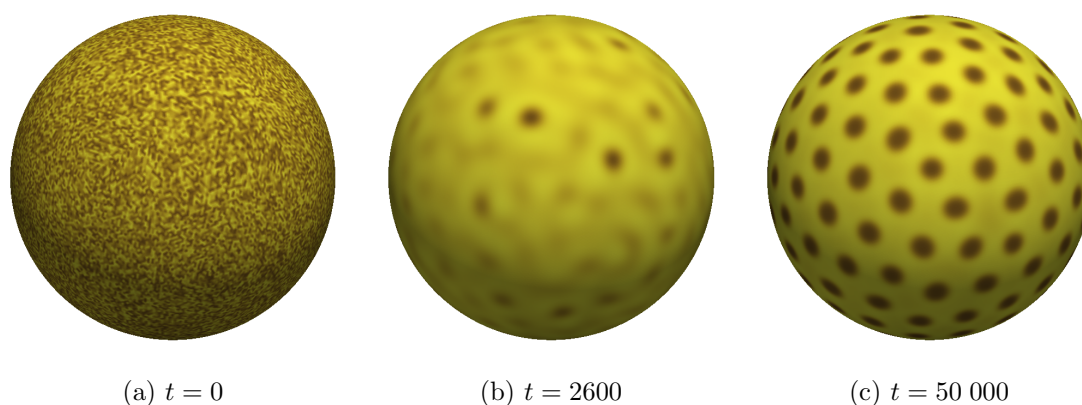
Obrázek 1: Rozdílné struktury na obdélníku

4 Vývoj na sféře

Na sféře se struktura vyvíjí stejným způsobem jako na obdélníku. Odpadá však nutnost zavádět okrajové podmínky, čímž se vznik skvrn více přiblíží skutečnému vývoji v přírodě.

Abychom mohli analyzovat závislost počtu skvrn na počátečních podmínkách, museli jsme vyvinout program, který skvrny počítá. Sféra je v datovém souboru reprezentována trojúhelníkovou sítí. Program data extrahuje do grafu, jež lineárně prochází a každou skvrnu prohledáváním do šířky ze seznamu vyřadí a započítá. Tímto programem jsme následně chování modelu na sféře analyzovali.

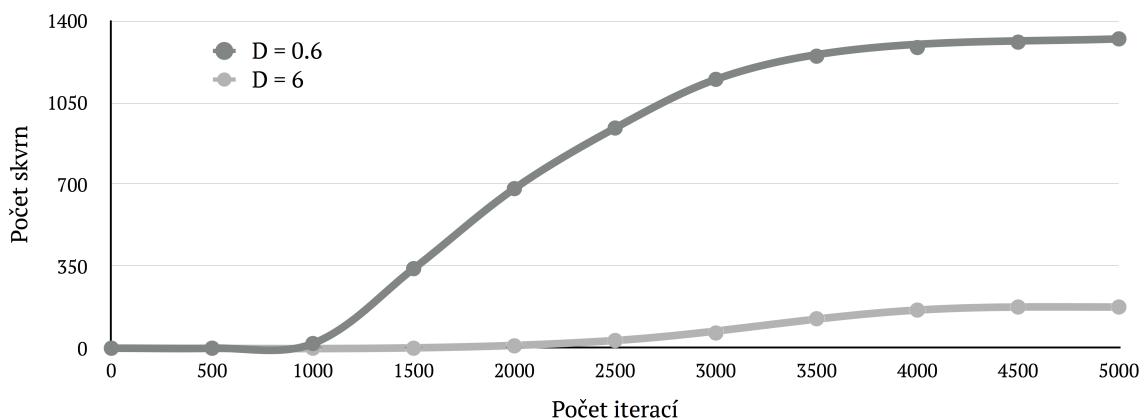
Nejprve proběhlo srovnání počtu skvrn při shodných parametrech modelu, avšak rozdílném počátečním náhodném šumu. Porovnali jsme struktury několika desítek různých vzorků s difúzním poměrem $D = 6$ po 50 000 iteracích. Relativní odchylka počtu skvrn



Obrázek 2: Vývoj struktur na sféře

činila 1.25 %, což je výrazně menší rozptyl než při simulacích na obdélníku, kde se odchylka kvůli ovlivnění okrajovou podmínkou pohybuje v řádu desítek procent.

Ve druhé fázi jsme se zaměřili na časový vývoj struktury při konkrétních počátečních podmínkách, v tomto případě $D = 0.6$ a $D = 6$. Na grafu lze vidět, že počet skvrn rychle konverguje k určité hodnotě, což se ve vizuálním zobrazení modelu projevuje tak, že jakmile dojde k vytvoření prvotních skvrn, nové už nevznikají a ty stávající se jen rozmisťují na sféře tak, aby zaujmulý co nejpravidelnější rozestavení.



Obrázek 3: Časový vývoj počtu skvrn

5 Závěr

Podařilo se nám objevit některé nové vztahy mezi parametry a výslednými strukturami. Vytvořili jsme program výrazně usnadňující další výzkum, jímž jsme potvrdili domněnku, že se model na sféře chová konzistentněji než na ohraničeném obdélníku. Tím jsme výrazně rozšířili hranice lidského poznání v oblasti počítání puntíků na sférických kočkách.

Poděkování

Děkujeme našemu supervisorovi Michalu Kozákovi za poutavé výklady a pomoc.

Reference

- [1] LIU, R. T., S. S. LIAW a P. K. MAINI. *Two-stage Turing model for generating pigment patterns on the leopard and the jaguar*. Physical Review E. 2006, DOI: 10.1103/PhysRevE.74.011914. ISSN 1539-3755.
Dostupné z: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.74.011914>