

Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace ve fyzice

Jan Pokorný - Gymnázium Bučovice
jenompokorny@gmail.com

Jan Kubát - Gymnázium Jiřího Ortena, Kutná Hora
jan.kubat@studenti.gymkh.eu

Jakub Renc - Gymnázium Christiana Dopplera, Praha
kuba.renc@gmail.com

Lucie Žilková - Střední škola logistiky a chemie, Olomouc
pucka97@seznam.cz

Petr Půlpán - Gymnázium Na Vítězné pláni, Praha
petpul@seznam.cz

Marek Baše - Gymnázium Na Vítězné pláni, Praha
marek.base@centrum.cz

Abstrakt:

Cílem naší práce bylo seznámit se s počítačovým algebraickým systémem Mathematica 10 a pokusit se pomocí něj simulovat konkrétní fyzikální situaci. Vytvořili jsme interaktivní simulaci jevu zvaného Fraunhoferova difrakce.

Úvod

Počítačové algebraické systémy (PAS nebo CAS z angl. Computer Algebra System) jsou počítačové systémy zpracovávající symbolické matematické výrazy. Jejich hlavním využitím je řešení matematických problémů, jako například řešení rovnic a nerovnic, zjednodušování výrazů, infinitezimální počet, vykreslování dvourozměrných i třírozměrných grafů.

Pomocí PAS lze simulovat vývoj libovolného dynamického systému, animovat proměny vektorového pole nebo parametricky vyjadřovat křivky a plochy. PAS jsou využívány v rozličných oblastech lidské činnosti.

Příklady PAS

Mezi známé PAS řadíme například program Wolfram Mathematica, kterým se tato práce bude dále zabývat. Tento program je komerční. Stejně tak je komerční například program Maple, sloužící k podobným účelům. K volně dostupným řadíme například programy Maxima či Xcas. Mathematica však patří k těm nejlépe vybaveným.

Mathematica 10

K pětadvacetiletému výročí vzniku společnosti Wolfram Research byla uvedena nová verze programu Mathematica, který byl vytvořen na konci osmdesátých let Stephenem Wolframem a nyní patří k vůdčím počítačovým algebraickým systémům. Mathematica je využívána ve vědeckých kruzích i komerční sféře.

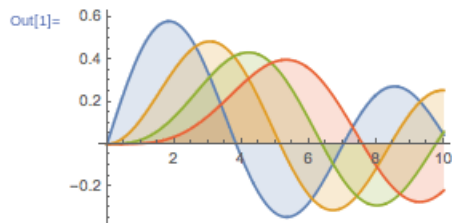
Mathematica snadno zvládne rozklad na mnohočlen...

```
In[2]:= Expand[(1 + x + y) (2 - x)^3]
```

```
Out[2]= 8 - 4x - 6x^2 + 5x^3 - x^4 + 8y - 12xy + 6x^2y - x^3y
```

...stejně jako vykreslení funkčních grafů.

```
In[1]:= Plot[Evaluate[Table[BesselJ[n, x], {n, 4}], {x, 0, 10}, Filling -> Axis]
```



Pomocí Mathematicy jsme naprogramovali obrazec vzniklý Fraunhoferovou difrakcí. Světlo prochází obdelníkovou štěrbinou, v programu lze měnit rozměry obdelníku a vlnovou délku světla.

Jev zvaný difrakce nastává, když světlo narazí na překážku (či štěrbinu) o rozměrech srovnatelných s jeho vlnovou délkou. V tomto případě vznikají na stínítku charakteristické „difrakční obrazce“. Fraunhoferova difrakce konkrétně nastává, pokud je stínítko v dostatečně velké vzdálenosti od štěrbin. Tato difrakce má tu výhodu, že má přesný matematický zápis pro průchod světla obdelníkovou štěrbinou:

$$\Psi = C \int_a^{-a} \int_b^{-b} e^{-ik(\theta_x x + \theta_y y)} dy dx = 4Cab \frac{\sin(\theta_x ka)}{\theta_x ka} \frac{\sin(\theta_y kb)}{\theta_y kb}$$

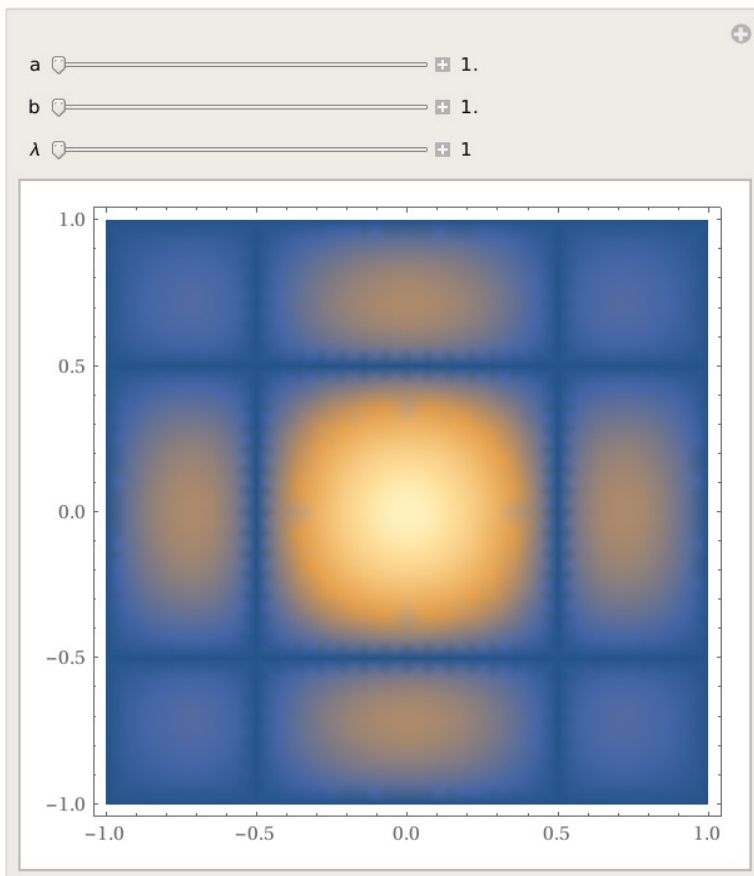
Tento zápis lze dále upravit na:

$$I = 16C^2 a^2 b^2 \left(\frac{\sin(\theta_x ka)}{\theta_x ka} \right)^2 \left(\frac{\sin(\theta_y kb)}{\theta_y kb} \right)^2$$

... kde I je intenzita světla v bodě θ , k je vlnové číslo (převrácená hodnota vlnové délky), a a b jsou rozměry obdélníkové štěrbin.

Po přepisu do jazyka Mathematica vypadá výsledek následovně:

```
Manipulate[
  DensityPlot[
    k = (2 Pi) / λ;
    i = a^2 b^2 (Sin[x*k*a] / (x*k*a))^2 (Sin[y*k*b] / (y*k*b))^2;
    i^(1/3),
    {x, -a, a}, {y, -b, b},
    PlotRange -> All],
  {a, 1, 10, Appearance -> "Labeled"}, {b, 1, 10, Appearance -> "Labeled"},
```



Wolfram Alpha

Společnost Wolfram Research kromě programu Mathematica vyvinula internetový vyhledávač Wolfram Alpha, který je na rozdíl od běžných internetových vyhledávač schopný sám najít a zpracovat potřebná data dostupná na internetu. Výhodou Wolframu Alpha je, že nevyžaduje zápis ve speciálním jazyce. Do konzole lze napsat prostý dotaz, Wolfram Alpha většinou pochopí, co měl člověk na mysli.

Stejně jako Mathematica může Wolfram Alpha sloužit v rozdílných oblastech lidské činnosti. Wolfram Alpha dokáže řešit matematické, chemické a fyzikální úlohy, dokáže spočítat obsah alkoholu v krvi nebo předpovědět počasí.

Nevýhodou Wolframu Alpha je, že možnost využití všech služeb je placená. Verze Pro umožňuje například sledovat postup řešení matematických úloh nebo pracovat s funkčními grafy.

Shrnutí

Díky tomuto miniprojektu se nám dostalo nových zkušeností s programem Mathematica. Tato praxe nám může pomoci při řešení fyzikálních problémů v dalším studiu.

Poděkování

Děkujeme panu Dr. Ing. Milanu Šiňorovi za ochotnou pomoc se seznámením s počítačovými algebraickými systémy. Také bychom rádi poděkovali organizátorům Týdne vědy, především Ing. Vojtěchu Svobodovi, a panu děkanovi prof. Ing. Igoru Jexovi.

Reference:

- [1] WOLFRAM, S.: *The Mathematica*; University of Cambridge 1999 (4. vydání)
- [2] Fraunhofer Diffraction. *Fraunhofer Diffraction* [online]. [cit. 2015-06-16]. Dostupné z: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/FraunhoferDiffraction.html>