Výpočet obsahu plošných obrazců pomocí metody Monte Carlo

Michaela Loudová[1], Oliver Pospíšil[2], Filip Šrámek[3], Michal Schulmeister[4]
[1]Gymnázium Vodňany
michaela.loudova1@gmail.com
[2,3,4]Přírodovědné gymnázium PRIGO
oliver.pospisil44@gmail.com
filip.sid.2004@gmail.com
schulmeister.michal3@seznam.cz

Abstrakt

Metoda Monte Carlo se využívá v mnoha oborech například v jaderné a částicové fyzice, termodynamice, statistické fyzice, finanční matematice, předpovědi počasí, filmovích efektech a počítačové grafice. V našem miniprojektu jsme používali metodu Monte Carlo u tří počítačových simulací např. určení Ludolfova čísla. Používali jsme k tomu generátor pseudonáhodných čísel programovacích jazyků MATLAB a R.

1 Úvod

Již na základní škole jsme se učili počítat obsahy ploch různých jednoduchých obrazců, jako jsou čtverce, obdélníky, kruhy a mnoho jiných. K těmto výpočtům jsme využívaly různé, jednoduše odvoditelné vzorce. K výpočtu obsahu plochy pod funkcemi používáme určitý integrál. Jeho výpočet často bývá složitý (u implicitně zadaných funkcí ho mnohdy nelze spočítat).

Mezi nejúspěšnější metody numerického výpočtu obsahu obrazců patří metoda Monte Carlo. Principem metody Monte Carlo je generování co největšího počtu pseudonáhodných rovnoměrně rozdělených (viz [1]) čísel, přičemž sledujeme, zda generovaná čísla padají pod graf funkce či nikoliv.

2 Postup

Celá metoda Monte Carlo spočívá v generování dvojic rovnoměrně rozdělených pseudonáhodných čísel. Ta spolu vytvoří souřadnice v obdélníku, který bude v ideálním případě definovaný oborem hodnot a definičním oborem křivky, pod kterou chceme spočítat obsah. Podle geometrické definice pravděpodobnosti spadne rovnoměrně vygenerovaný bod v tomto obdélníku pod křivku s pravděpodobností:

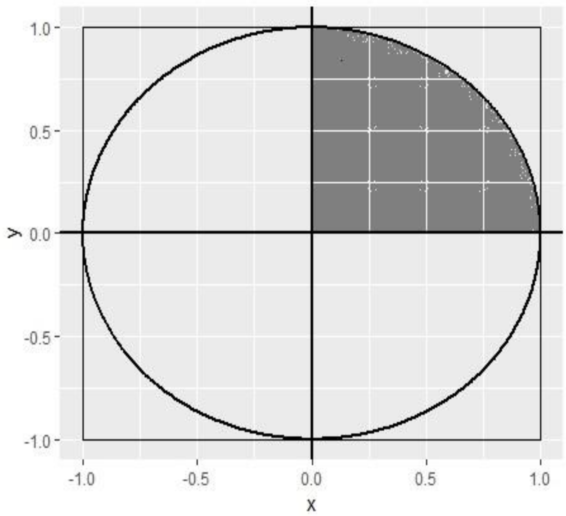
$$P \approx \frac{S'}{S}\ , \tag{1}$$

kde S'je obsah plochy pod hranicí křivky a S je obsah obdélníku.

3 Simulace

3.1 Odhad Ludolfova čísla π

Součástí tohoto projektu byla úloha, ve které jsme se pokoušeli odhadnout velikost Ludolfova čísla π. Při řešení této úlohy jsme generovali rovnoměrně pseudonáhodná čísla X a Y, která byla souřadnicemi bodů uvnitř čtverce o straně délky 2 se středem v bodě [0,0]. Do tohoto čtverce byl vepsán kruh s poloměrem 1. Pro zjednodušení jsme omezili výpočet na první kvadrant. Počítač vygeneroval v rámci obrazce náhodné body, jejichž rozdělení na ploše obrazce bylo rovnoměrné.



Obr. 1: Grafické znázornění zadané úlohy.

Nechť N' je počet pseudonáhodných bodů vygenerovaných ve čtvrtkruhu a N je celkový počet vygenerovaných bodů v jednotkovém čtverci, tj. $N > N'$. Z geometrické definice pravděpodobnosti plyne, že platí$P \approx \frac{N'}{N}$ tedy podle (1) platí, že $\frac{S'}{S} = \frac{N'}{N}$. Z toho dále plyne $S' = S\frac{N'}{N}$. V našem případě platí, že$S = 1$ a $S' = \frac{\pi}{4}$, a proto dostáváme odhad $\pi = 4\frac{N'}{N}$.

N	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Odhad π	2.4	3.52	3.08	3.1372	3.13612	3.14362	3.141001

Tab. 1: Odhad čísla π v závislosti na *N*.

3.2 výpočet plochy pod explicitně zadanou funkcí

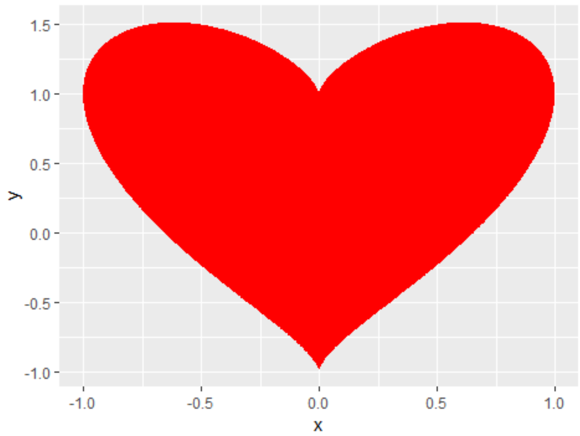
Plochu pod křivkou $f(x) = sin^2(x)cos^3(x), x\epsilon \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, lze spočítat určitým integrálem jako:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)cos^3(x)\,dx = \begin{Bmatrix} \sin(x) = t \\ \cos(x)\,dx = dt \end{Bmatrix} = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \int_0^1 t^2dt - \int_0^1 t^4dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

Tuto plochu jsme dále odhadli Monte Carlo metodou, tj. v obdélníku jsme generovali pseudonáhodná čísla $[\boldsymbol{X_i}, \boldsymbol{Y_i}]$ a pokud platilo, že $\boldsymbol{Y_i} < \boldsymbol{f(X_i)}$, pak bod padl pod křivku. Celkový počet bodů pod křivkou jsme značili $\boldsymbol{N'}$ a symbolem *N* pak celkový počet všech rovnoměrně vygenerovaných bodů v obdélníku. Obsah plochy je dán jako: $\boldsymbol{S' \approx \frac{N'}{N} S}$.

3.3 výpočet plochy pod implicitně zadanou funkcí

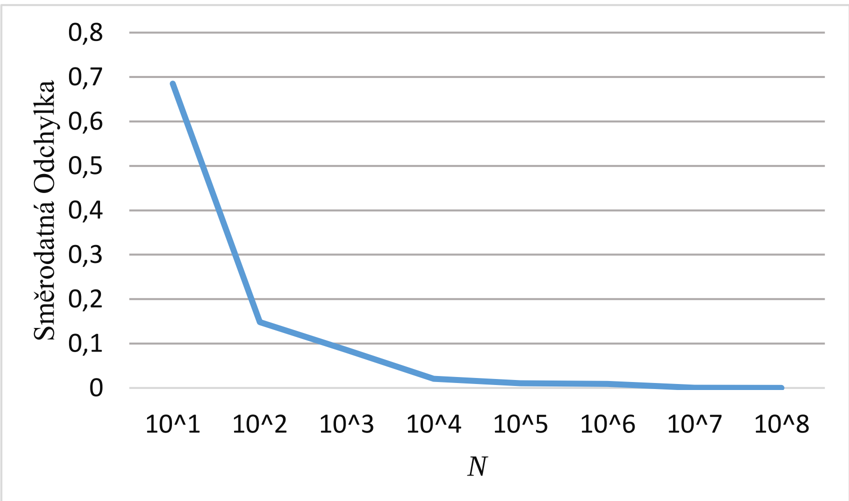
Ne každou funkci jsme schopni vyjádřit v explicitním tvaru. Takovéto funkce nazýváme implicitní. Implicitní funkce nelze integrovat, tedy zjistit jejich obsah analytickým způsobem. Pro výpočet jejich obsahu je tedy využití metody Monte Carlo nezbytné. My jsme zjišťovali obsah obrazce znázorněného na obr.2., který je definován předpisem $x^2 + \left(y^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$. Inspiraci k výpočtu obsahu srdíčka jsme získali [2].



Obr. 2: Grafické znázornění křivky.

	N	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Odhad	1	3	2.95	3.145	3.1405	3.13756	3.13619	3.139498	3.13855
	2	2	2.8	3.005	3.1235	3.15425	3.138585	3.140115	3.13866
	3	2.5	3.05	3.22	3.1015	3.11295	3.13621	3.137992	3.13852
	4	3	3.15	3.315	3.151	3.13525	3.138835	3.138271	3.13823
	5	2.5	2.85	3.175	3.136	3.14015	3.110205	3.13944	3.13823
	6	3.5	3.1	3.1	3.1095	3.1441	3.13821	3.139299	3.13859
	7	3	3	3.15	3.1705	3.14555	3.137275	3.138516	3.13862
	8	3.5	2.85	3.07	3.1445	3.1342	3.139985	3.13796	3.13847
	9	4.5	2.95	3.195	3.1435	3.1419	3.13952	3.139316	3.13854
	10	3	3.27	3.185	3.116	3.1403	3.13925	3.1375	3.13857
Arit. Průměr		3.05	2.997	3.156	3.13365	3.138621	3.1354265	3.1387907	3.1384986
Směr. Odchylka		0.6851602	0.1482528	0.0853685	0.0209696	0.0106939	0.0089581	0.0008531	0.0001496

Tab. 2: Odhad obsahu plochy v závislosti na *N*.



Obr. 3: Směrodatná odchylka v závislosti na *N*.

4 Shrnutí

V rámci našeho příspěvku jsme zjistili, že metoda Monte Carlo je efektivním způsobem výpočtu plochy pod křivkou, která je jak explicitně tak i implicitně zadaná. Tuto efektivitu metody odvozujeme na základě tří různých simulací.
První, tedy výpočet Ludolfova čísla π, nám ukázala, že s rostoucím počtem pseudonáhodně generovaných čísel náš odhad konverguje k jeho skutečné hodnotě. Druhá se zabývala problematikou určení plochy pod křivkou $f(x) = sin^2(x)cos^3(x), x \epsilon \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, prostřednictvím metody Monte Carlo. Poslední ze simulací počítala plochu pod křivkou, která je zadaná implicitně, tj. že ji nejsme schopni explicitně vyjádřit. U poslední z výše zmiňovaných úloh jsme se dále zabývali přesností našich odhadů. Z obr. 1 lze pozorovat klesající směrodatnou odchylku v závislosti na rostoucím počtu rovnoměrně pseudonáhodně generovaných čísel.

První dvě zmíněné úlohy lze spočítat přesně prostřednictvím určitého integrálu, nicméně analytický způsob vyžaduje nalezení primitivní funkce, tento výpočet může být velmi složitý a tak Monte Carlo metoda představuje vhodnou alternativu k výpočtu určitého integrálu. A sice takovou, že porovnává počet pseudonáhodně generovaných čísel, které dopadnou pod křivku s celkovým počtem všech generovaných čísel. Množinou, v níž jsme rovnoměrně generovali čísla, byl obdélník. Toto porovnávání čísel jsme použili ke stanovení plochy pod křivkou.

Celý miniprojekt se nám velmi líbil, hlavně v tom, že jsme se seznámili s programovacími jazyky, které jsme neznali a „osahali“ si matematiku na reálných a snadno představitelných situacích. Mimoto jsme zjistili, že aplikační potenciál metody Monte Carlo je značný, jak je patrné např. z práce [3].

Poděkování

Reference

[1] J. Anděl, *Základy matematické statistiky*, MatfyzPress (2011).

[2] L. Dvořáková, *Metoda Monte Carlo*, Rozhledy matematicko-fyzikální.*

[3] T. Leskiv, *Simulace Monte Carlo – informační zdroj rizikového rozhodování*, Fakulta Dopravní, ČVUT (2015).

**Tato práce ještě nebyla publikována.*