Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace

D. Hanke[1], Z. Plešek[2], D. Švarc[3], J. Ferenčík[4], S. Klímová[5], O. Taut[6]

[1]Dvořákovo gymnázium a Střední odborná škola ekonomická, [2]Masarykovo gymnázium Příbor, [3]Gymnázium Christiana Dopplera, Praha, [4]Gymnázium Pardubice, Dašická 1083, [5]Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, [6]Gymnázium a SOŠ Plasy

[1]22ahanke@dgkralupy.eu, [2]zdenek.plesek@gypri.cz, [3]dominiksvarc01.gmail.com, [4]felycz.dev@gmail.com, [6]ondrejtaut@seznam.cz

Abstrakt:
Počítačové algebraické systémy se v praxi vzužívají pro řešení problémů, které není praktické řešit lidkými silami. V rámci miniprojektu jsme v tomto systému úspěšně implementovali několik úloh.

1. Úvod

V praxi se pří řešení různých fyzikálních úloh setkáváme s řadou problémů. Někdy je potřeba použít výpočetní techniku a úlohu numerický vyčíslit, ale to není vždy dostačující. Proto můžeme využít algebrických počítačových systémů, které jsou schopné operovat s výrazy stejným způsobem jako člověk. V rámci miniprojektu jsme se s jedním z těchto systémů, *Wolfram Mathematica*, seznámili a implementovali v něm řešení určitých matematických problémů.

Wolfram Mathematika

Wolram Mathematica je programovací jazyk pro implentaci zápisů s ním asociované prostředí, schopné jejich řešení. Program je schopen provádět řadu výpočtů, řešit rovnice, kreslit grafy funkcí a mnoho dalšího.

2. Řešení základních středoškolských problémů

Wolfram Mathematica můžeme použít k řešení různých matematických problémů, které běžně řešíme na střední škole. Teď se podíváme na řešení typických problému lineárních rovnic, které najdete ve sbírkách.

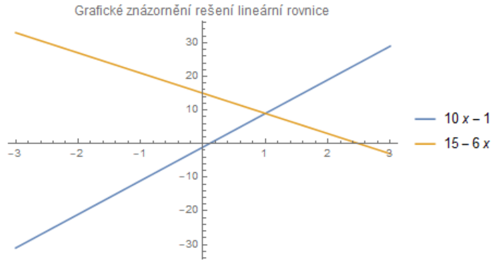
Rovnici $10x-1=15-6x$ můžeme řešit ve Wolframu následovně:

```
Solve[10 x - 1 == 15 - 6 x, x]
{{x → 1}}
```

obr. 1

Tuto rovnici by bylo možné také řešit graficky. Tento druh řešení je složitější na zápis i na vyhodnocení, protože zde může nastat lidská chyba při zjišťování hodnoty neznámé z průsečíků funkce levé a pravé strany rovnice.

```
Plot[{10 x - 1, 15 - 6 x}, {x, -3, 3}, PlotLegends → "Expressions",
 PlotLabel → "Grafické znázornění rešení lineární rovnice"]
```



obr. 2: grafické řešení lineární rovnice

Stejným způsobem, pouze za užití jiných příkazů, můžeme řešit nerovnice nebo příklady s absolutní hodnotou.

$$\frac{15x-4}{2} < 1+6x$$

```
In[5]:= Reduce[(15 x - 4) / 2 < 1 + 6 x]
Out[5]= x < 2
```

$$|5-2x| < 1$$

```
In[23]:= Reduce[Abs[5 - 2 x] < 1, x, Reals]
Out[23]= 2 < x < 3
```

obr. 3: rovnice s absolutní hodnoutou a jejich řešení

Soustavy rovnic se dají řešit dvojím způsobem.

$$\begin{aligned} x+y &= 13 \\ y-z &= 5 \\ x-z &= 2 \end{aligned}$$

obr. 4: řešená soustava rovnic

Ve tvaru ve kterém je dostanete nebo je lze přepsat do matic. Řešení maticemi bych v případě používání Wolframu nedoporučoval, protože může nastat lidská chyba v případě přepisu. Jednodušší je tedy ponechat tvar který dostaneme…

```
Solve[{x + y == 13, y - z == 5, x - z == 2}, {x, y, z}]
{{x → 5, y → 8, z → 3}}
```

obr. 5: Standartní tvar

```
MatrixForm[{{1, 1, 0, 13}, {0, 1, -1, 5}, {1, 0, -1, 2}}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

obr. 6: Maticový tvar

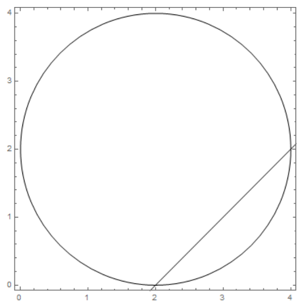
3. Analytická geometrie

Wolfram Mathematica se dá použít i pro výpočet a reprezenetaci analytické geometrie. Jedním z ukázkových příkladů je výpočet průsečíků a kružnice.

Obecnou rovnicí kružnice je $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Obecná rovnice přímky je $ax+b=y$. Úloha se řeší dosazením rovnice přímky za y v rovnici kružnice a dosazením hodnot. Výsledek pak jsou možné hodnoty x . Po jejich dosazení do rovnice přímky lze i získat hodnoty y .

Postup řešení ve Wolframu:

Vytvoření náčrtu:



obr. 7: náčrt řešené úlohy

Příkaz *Graphics* vytvoří reprezentaci objektů, které jsou mu vloženy jako argument. V tomto případě byly argumenty:

- Circle[{2,2},2],
- InfiniteLine[{0,-2},{1,1}]

Circle[{2,2},2] vytvoří kružnici o středu {2,2} a poloměru 2.

InfiniteLine[{0,-2},{1,1}] vytvoří přímku z bodu {0,-2}, která má směrový vektor {1,1}.

Samotný výpočet:

Výpočet je v Wolframu poměrně jednoduchý. Prvním krokem je zapsat rovnici a říct programu, které znaky má nahradit hodnotami.

```
(x - m) ^2 + (y - n) ^2 == r^2 /. {m → 2, n → 2, r → 2, y → x - 2}
(-4 + x)^2 + (-2 + x)^2 == 4
```

obr. 8: vložení hodnot

Na prvním řádku je zadána rovnice a příkaz k nahrazení znaků hodnotami. Další řádek pak obsahuje výstup programu. Chceme-li nyní získat hodnotu x, použijeme příkaz Solve[výraz].

```
Solve[(-4 + x)^2 + (-2 + x)^2 == 4]
{{x → 2}, {x → 4}}
```

obr. 9: řešení X ve Wolframu

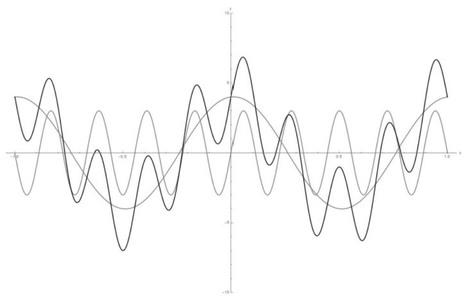
Výstupem pak jsou připustitelné hodnoty x, 2 a 4. Chceme-li také získat hodnoty y, dosadíme tyto hodnoty do výchozí rovnice přímky x-2=y.

```
y == x - 2 /. {{x → 2}, {x → 4}}
{y == 0, y == 2}
```

obr. 10: řešení Y ve Wolframu

4. Vykreslení goniometrických funkcí

Wolfram, jak už bylo naznačeno v předchozích oddílech je schopen vykreslovat grafy funkcí. Zde spadají i goniometrické funkce, které je Wolfram schopen skládat.



obr. 11: Skládané gonimetrické funkce

5. Šikmý vrh

Oštěp je vržen počáteční rychlostí v pod úhlem q . Odpor vzduchu je zanedbán. Budeme zkoumat průběh vrhu pro různé hodnoty parametrů v, q . Program *Wolfram Mathematica* kreslí grafy s nastavitelnými parametry.

$$h=\frac{v^2\sin^2(q)}{2g}$$

obr. 12: vzorec maximální výšky

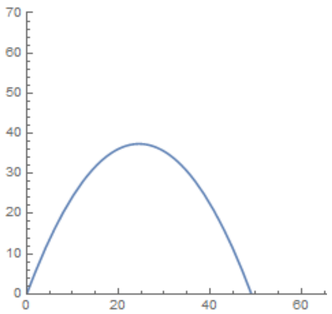
$$d=\frac{2v^2\sin(q)\cos(q)}{g}$$

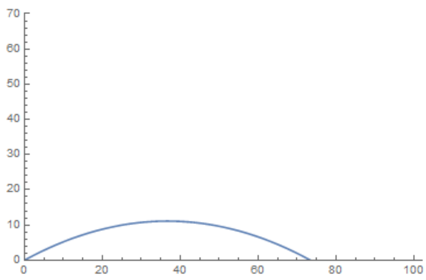
obr. 13: dolet oštěpu

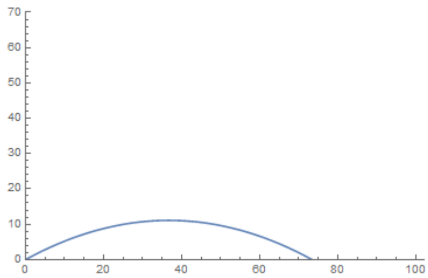
$$y(x)=\tan(q)x-\frac{gx^2}{2(v^2\cos^2(q))}$$

obr. 14: rovnice popoisující trajektorii oštěpu

Jak z následujících obrázků jasně vyplývá, dolet oštěpu je největší při 45°:







6. Závěr

Cílem miniprojektu bylo seznámit se Algebraickými počátačovými systemy, především Wolfram Mathematica, což se nám úspěšně povedlo. Dále jsme demonstrovali typ úloh, které jsou Wolframem Mathematica řešitelné.

7. Poděkování

Chtěli bychom poděkovat doc. Dr. Ing. Milanu Šiňorovi za jeho pomoc při tvorbě naší práce.