Procházka na síti

Adam Červenka
Masarykovo gymnázium, Příbor, p. o.,
Jičínská 528, 742 58 Příbor
adam.cervenka@gypri.cz

Cílem tohoto článku je použít teorii náhodných procházek na grafech k popisu chování cestujícího, který se náhodně pohybuje po zjednodušeném modelu pražské tramvajové sítě.

I. ÚVOD

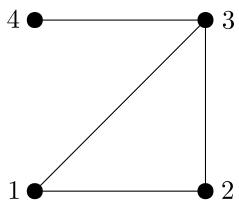
Grafy, nebo-li sítě, jsou matematickým vyjádřením vztahů v soustavě pomocí vrcholů a hran. Teorie grafů má široké spektrum využití, a to v teorii komplexních systémů, zejména v oblasti informačních technologií. Úvodu do teorie grafů se věnujeme v sekci II.

Součásti teorie grafů jsou i náhodné procházky po síti (viz sekce III). Ty zkoumají pohyb náhodně se pohybujících entit. Takovým náhodným pohybem je např. pouť tzv. opilého námořníka, který vzhledem ke svému stavu volí kroky zcela náhodnými směry.

V sekci IV se věnujeme pohybu po síti 17 pražských tramvajových zastávek. Za pomoci počítače můžeme zjistit, s jakou pravděpodobností bude po určitém počtu kroků náhodně pohybující se cestující nacházen na konkrétní zastávce.

II. ZÁKLADY TEORIE GRAFŮ

Graf je množina N vrcholů, které jsou spojeny hranami.



Obrázek 1: Příklad grafu o 4 vrcholech a 4 hranách

Umístění hran mezi vrcholy je popsáno tzv. *adjacenční maticí.* Adjacenční matice je tabulka $N \times N$ definovaná tak, že na i-tém řádku v j-tém sloupci, pozice (i, j), je číslo, které odpovídá počtu hran, které spojují vrcholy i a j. (Tedy 0 pokud vrcholy nejsou spojeny, 1 pokud jsou spojeny právě 1 hranou atd.) Např. pro graf z obr. 1 je adjacenční matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

V matici A^k, kde k je počet kroků, leží na pozici (i, j) této matice číslo, které značí počet různých cest, kterými se lze dostat z vrcholu i do vrcholu j v k krocích. (Násobení matic je definováno v příloze A.)

Stupeň vrcholu i, $st(i)$, je definován jako počet hran vystupujících z vrcholu i.

Matice přechodu P se získá z adjacenční matice tak, že že každý její i-tý řádek vydělíme $st(i)$. Např. matice přechodu odpovídající adjacenční matici (1) je

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

III. NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Označme počáteční pozici chodce jako i, této pozici přiřaďme vektor $\langle i| = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, kde číslo 1 je na i-tém místě. Pravděpodobnost přechodu z vrcholu i do vrcholu j je hodnota matice přechodu P na pozici (i, j).

Pravděpodobnosti nalezení chodce na jednotlivých vrcholech jsou potom složkami řádkového vektoru $\langle i|P$. Každý další krok získáme násobením maticí P zprava. Po k krocích budou tedy pravděpodobnosti nalezení chodce určeny vektorem $\langle i|P^k$.

Po mnoha krocích se výraz $\langle i|P^k$ blíží limitnímu stacionárnímu stavu $\langle v|$, který nezávisí na počátečním stavu i. Pro tento stav platí

$$\langle v|P = \langle v|, \tag{3}$$

tedy dalším krokem se stacionární stav nemění.

Ze struktury grafu lze snadno stacionární stav vyčíst. Platí totiž, že

$$\langle v|j\rangle = \frac{st(j)}{\sum_{i=1}^{N} st(i)}, \tag{4}$$

kde $|j\rangle$ je sloupcový vektor, který má na j-té pozici číslo 1 a na ostatních má nuly.

IV. PŘÍKLAD: PRAŽSKÁ TRAMVAJOVÁ SÍŤ

Vybrali jsme 17 pražských tramvajových zastávek, jež považujeme za vrcholy grafu, spojení mezi nimi zajišťují tramvajové spoje. Každé 2 zastávky jsou spojeny hranami, jejichž počet odpovídá počtu přímých tramvajových spojů mezi zastávkami. Zavedeme pravidlo o tom, že pokud cestující narazí na jednu ze 17 zastávek, vystoupí a použije náhodně vybraný spoj.

Již při prozkoumání obr. 2 si můžeme povšimnout, že nejvíce spojů jezdí na Karlovo náměstí. Z rovnice (4) plyne, že právě na této zastávce se po dostatečném množství kroků bude cestující nejpravděpodobněji nacházet, a to bez ohledu na počáteční zastávku.

Zkusme naopak řešit úlohu pro konečný počet kroků. Mějme cestujícího, který začne svou cestu na Pohořelci (č. 1). Nás zajímá nejmenší počet kroků, po kterém se bude cestující nejpravděpodobněji nacházet na Karlově náměstí (č. 10). Hledáme tedy nejmenší k takové, že $\langle 1|P^k|10\rangle < \langle 1|P^k|j\rangle$, $\forall j \neq 10$. Pro takto velké matice se využití počítačového softwaru stává nezbytností. My jsme pro výpočet použili program *Wolfram Mathematica*. Tak tedy spočítáme, že nejmenší počet kroků pro vyplnění podmínky je právě 6 kroků.

V. ZÁVĚR

Pro studium náhodných procházek po síti jsme užívali jak teoretické znalosti, tak i počítačové výpočty. Je zajímavé, že řešení pro malý počet kroků je mnohem komplikovanější než řešení pro velký, až nekonečný, počet kroků.

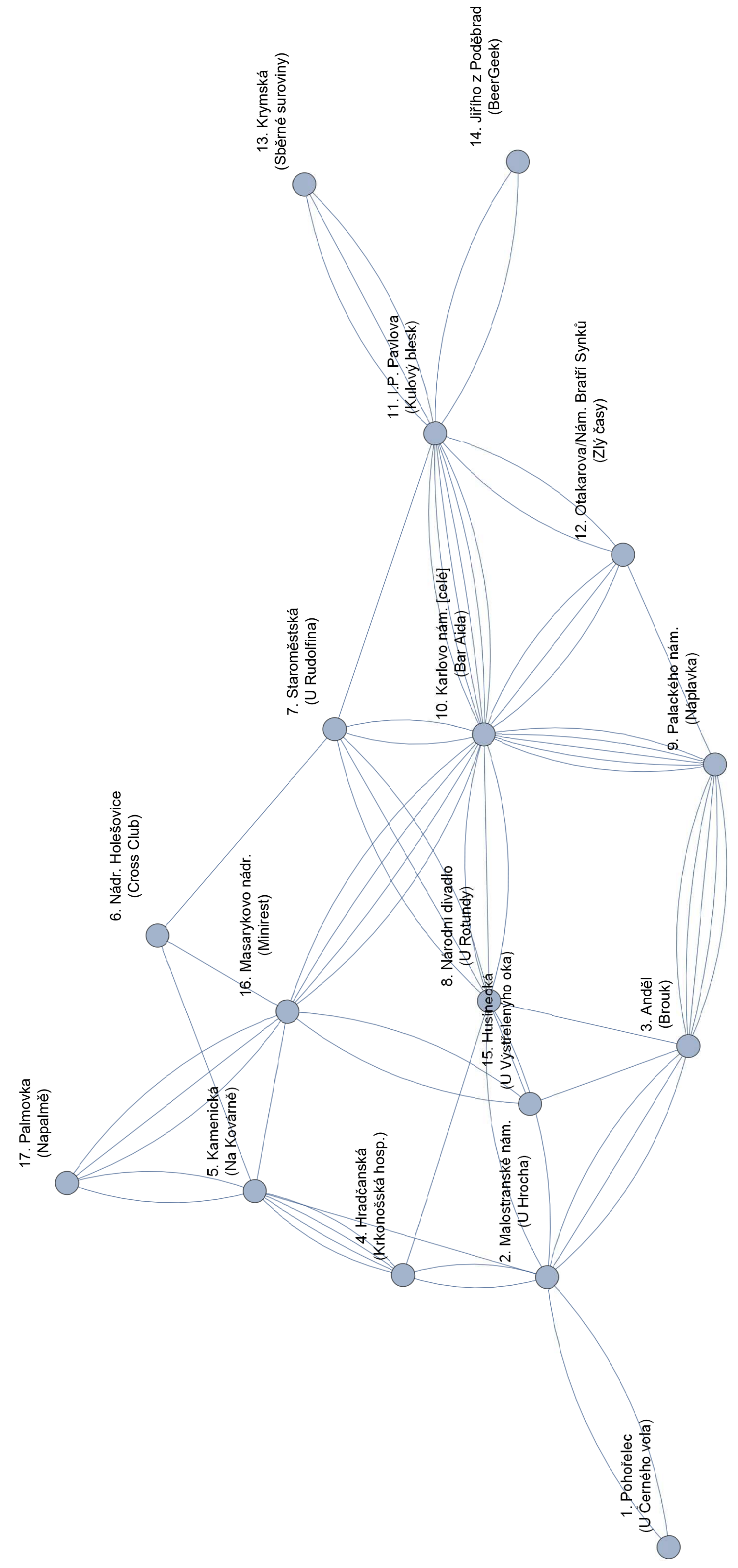
Příloha A: NÁSOBENÍ MATIC

Mějme matici A o rozměrech $m \times n$ a matici B o rozměrech $n \times r$. Prvky matice A označíme $A_{i\ell}$ a prvky matice B jako $B_{\ell j}$, kde $i = 1, \ldots, m; \ell = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots,\ r$. Prvek matice AB na pozici (i, j) je roven

$$\sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} B_{\ell j}. \tag{A1}$$

Například spočtěme:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{A2}$$



Obrázek 2: Vybrané zastávky pražské tramvajové sítě, tento graf obsahuje 17 vrcholů a 69 hran, nejvyšší stupeň má Karlovo náměstí, st = 23.