Jak matematika pomáhá při řešení ekonomických problémů

Daniel Rizman (Gymnázium, Varšavská cesta 1, danorizman@gmail.com)
Veronika Smejkalová (Gymnázium Velké Meziříčí, v-smejkalova@centrum.cz)
Zdislava Vávrová (Gymnázium Velké Meziříčí, zdislava.vavrova@seznam.cz)

Abstrakt:

Vzhledem k současnému stavu světové ekonomiky je nutné snižovat výdaje, například v oblasti dopravy. Seznámili jsme se s několika metodami, které nám pomáhají minimalizovat náklady na dopravu, případně šetřit čas na výrobních linkách. Tento článek pojednává o metodách nejbližšího souseda kombinovaného s párovými záměnami nebo simulované žíhání. Pro řešení ekonomických problémů v oblasti dopravy doporučujeme metodu simulovaného žíhání, jejíž výsledky umožnily více snížit náklady.

1 Úvod

Jak už napovídá název, budeme se zabývat tím, jak matematika pomáhá při řešení ekonomických problémů. Seznámili jsme se s několika metodami, jak ekonomické problémy řešit. Podrobněji se budeme zabývat problémem obchodního cestujícího.

Krátce shrneme slovní formulaci tohoto problému. Úkolem je najít nejkratší cestu mezi n místy tak, aby každé místo bylo navštíveno právě jednou, přitom výchozí a koncový bod je totožný. Převedeme-li úlohu na optimalizaci v grafech, jedná se o nalezení nejkratšího okruhu, který zahrnuje všechny uzly (tzv. minimální Hamiltonův cyklus). Dodejme, že úloha obchodního cestujícího je NP-obtížná, to znamená, že prozatím neexistuje algoritmus schopný najít její řešení v čase, který závisí na rozměru úlohy (tj. počet měst) pomocí mocninné funkce.

Úlohu lze řešit metodou nejbližšího souseda a párovými záměnami nebo také simulovaným žíháním.

2 Problém obchodního cestujícího

2.1 Metoda nejbližšího souseda kombinovaná s párovými záměnami

- Z výchozí polohy určíme vzdálenosti dostupných míst, které ještě nebyly navštíveny.
- Zvolíme místo, k němuž vede nejkratší cesta.
- Tento postup stále opakujeme, dokud nenavštívíme všechna místa a nevrátíme se do výchozí polohy.
- Získaný výsledek je dále možné zpřesnit. Postup popíšeme algoritmicky:

1. posloupnost měst rozdělíme na tři disjunktní podposloupnosti.
2. pořadí měst v prostředí posloupnosti otočíme
3. tuto posloupnost vložíme zpět mezi 1. a 3. podposloupnost měst
4. provedeme výpočet délky cesty v nově získané posloupnosti míst a uložíme ji v případě, že jsme získali kratší cestu
5. celý proces opakujeme, dokud neproběhnou všechny možné výměny

Výhodou popsané metody je, že negeneruje všechny posloupnosti, kterých je *n!*, ale celkově proběhne pouze cca $0{,}5n^2$ párových záměn (výchozí bod se pochopitelně nepohybuje). Metoda je tedy rychlá, avšak nemusí vždy najít optimální řešení.

2.2 Simulované žíhání

Simulované žíhání je poměrně pokročilá metoda inspirovaná chladnutím materiálu hledáním termodynamické rovnováhy. Základní postup simulovaného žíhaní shrneme algoritmicky:

1. nastavíme koncovou a počáteční „teplotu“ a generujeme počáteční posloupnost měst
2. vypočteme délku trasy
3. generujeme nové řešení pomocí záměny pevně a náhodně zvoleného města
4. vypočteme délku nové trasy
5. rozhodneme, zda stav přijmeme či nikoliv (přijmeme, pokud se délka cesty sníží nebo pokud existuje „vysoká pravděpodobnost“ - podrobněji viz [1] - že můžeme zachovat trasu, která je delší než původní)
6. v případě přijetí nový stav uložíme a postup opakujeme od kroku 3, dokud není splněna ukončovací podmínka (např. počet iterací nebo konečná teplota), průběžně také snižujeme „teplotu“ geometrickou řadou.

Na první pohled se zdá, že simulované žíhání se od metody párových záměn neliší. Rozdíl je však v testu přijetí nového stavu. Cesta se tak může prodloužit, čímž se dostaneme z místa s lokálním minimem délky trasy (tj. bod v určité oblasti grafu funkce, kde je dosaženo minimální hodnoty).

3 Výsledky

3.1 Reálný případ

Tabulka 1: zadání úlohy (doba jízdy vlakem)

		Praha	Bratislava	Vídeň	Kyjev	Záhřeb	Bukurešť	Budapešť	Bělehrad
1	Praha	0	5,5	6	32,8	13	24,3	8,5	16,7
2	Bratislava	5,5	0	0,95	34	8,65	18,6	2,7	11
3	Vídeň	6	0,95	0	34,5	6	18	2,8	11
4	Kyjev	32,8	34	34,5	0	25,5	22,5	15,5	26,5
5	Záhřeb	13	8,65	6	25,5	0	23	14,3	6,3
6	Bukurešť	24,3	18,6	18	22,5	23	0	17,3	13
7	Budapešť	8,5	2,7	2,8	15,5	14,3	17,3	0	7,8
8	Bělehrad	16,7	11	11	26,5	6,3	13	7,8	0

Počáteční teplota: 15
Koncová teplota: 0,01
Koeficient ochlazování: 0,95 (kvocient geometrické řady)

Tabulka 2: výsledky výpočtu pro reálný případ

	Metoda nejbližšího souseda	Metoda simulovaného žíhání
Průběh cesty	1, 2, 3, 5, 8, 6, 4, 7, 1	1, 2, 7, 4, 6, 8, 5, 3, 1
Doba cesty (hod.)	78,25	77,5
Doba výpočtu (s)	0,0026	1,862

Uvádíme nejlepší výsledek, kterého jsme dosáhli. Parametry pro simulované žíhání jsou:

3.2 Náhodně generované vzdálenosti měst

Parametry jsou stejné jako u reálného případu.

Tabulka 3: průměrné hodnoty délky cesty a doby výpočtu při použití simulovaného žíhání

Koeficient ochlazování	Počet měst: 100		Počet měst: 1000	
	Délka cesty	Doba výpočtu	Délka cesty	Doba výpočtu
0,8	772,90 ±21,84	5,19 ±0,30	113781,10 ±414,54	15,83 ±0,49
0,9	762,40 ±27,25	10,97 ±0,55	112655,30 ±471,65	32,63 ±0,44
0,95	759,80 ±29,52	22,92 ±2,02	-**	-**
0,99*	742,10 ±19,52	53,99 ±2,55	-**	-**
0,995*	734,20 ±17,29	109,66 ±8,04	-**	-**

*z důvodu časové náročnosti jsme pozměnili koncovou teplotu na 0,5

** pro časovou náročnost nebyly pro tyto koeficienty hodnoty měřeny

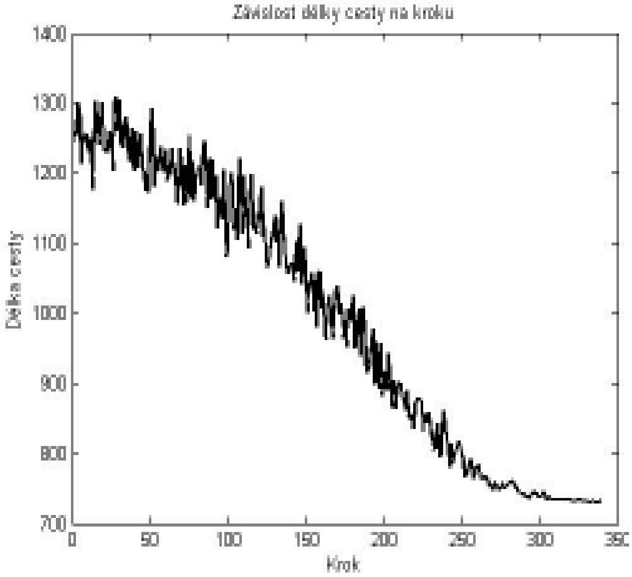
Tabulka 4: minimální délky cesty při použití simulovaného žíhání

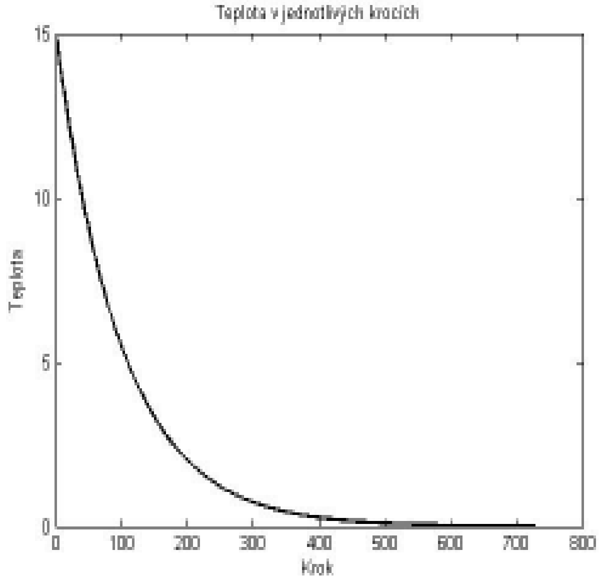
Koeficient ochlazování	Počet měst: 100	Počet měst: 1000
0,8	759	113524
0,9	748	112449
0,95	737	-**
0,99*	730	-**
0,995*	726	-**

*z důvodu časové náročnosti jsme pozměnili koncovou teplotu na 0,5

** pro časovou náročnost nebyly pro tyto koeficienty hodnoty měřeny

Při použití metody nejbližšího souseda s párovými záměnami je délka cesty pro 100 měst 740 a pro 1000 měst 105 389.





Vlevo uvádíme graf závislosti délky cesty na kroku výpočtu (100 měst s koeficientem ochlazování 0,995) – ačkoliv po několika krocích dospěl graf do poměrně nízkých hodnot, opakovaně opouštěl lokální minima, až se ustálil na hodnotě 726.

Vpravo uvádíme graf závislosti teploty na počtu kroků výpočtu – teplota klesala od zadané počáteční teploty na zadanou minimální teplotu. Tvarem grafu je exponenciála.

4 Závěr

V tomto článku jsme se zabývali problémem obchodního cestujícího. Cestu lze naplánovat pomocí několika metod. My jsme využívali metodu nejbližšího souseda s párovými záměnami a simulované žíhání. Při našem pozorování jsme zjistili, že je výhodnější použít časově náročnější metodu, a to simulované žíhání. Pro srovnání tabulka číslo 4. Sice pro 1000 měst získáme metodou simulovaného žíhání delší cestu, ale toto je nejspíše způsobeno tím, že jsme provedli malý počet iterací a rychle ochlazovali. Nejspíše jsme uvízli v lokálním minimu.

V rámci metody simulovaného žíhání jsme zjistili, že při zvýšení koeficientu ochlazování je větší pravděpodobnost překonání lokálního minima a tím možnost nalezení kratší cesty.

Poděkování

Děkujeme především Martinovi Veselému za seznámení s touto problematikou, za velkou pomoc při zpracování projektu a za trpělivost. Dále děkujeme jaderné fakultě ČVUT v čele s panem Svobodou za organizaci celé akce Týdne vědy.

Reference:

[1] VESELÝ, M.: *Rozvrhování produkce při závislosti operačního času dávky na pořadí jejího zpracování*, 2012

[2] *Travelling salesman problem*, citováno: 19.6.2012, dostupné online: http://en.wikipedia.org/wiki/Traveling_salesman_problem

[3] *Problém obchodního cestujícího*, citováno: 19.6.2012, dostupné online: http://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9m_obchodn%C3%ADho_cestuj%C3%ADc%C3%ADho