Matematický popis systémů interagujících částic

Miroslav Hanzelka[1], Václav Rozhoň[2]
[1]Gymnázium Česká Lípa, Žitavská 2969; mirekhanzelka@gmail.com
[2]Gymnázium J. V. Jirsíka, Fráni Šrámka 23, České Budějovice;
vaclavrozhon@gmail.com

Abstrakt

V našem projektu jsme se zabývali popisem systémů interagujících částic (IPS), které lze považovat za zjednodušený model pohybu chodců. Vytvořili jsme vlastní jednoduchý model založený na homogenním markovském procesu. Pomocí matice přechodu daného procesu jsme hledali stacionární řešení a zkoumali jsme hustotní profil systému v závislosti na zvolených parametrech.

1 Úvod

Nejprve se seznámíme s teorií, kterou jsme k popisu modelu použili.

Každý systém interagujících částic (IPS) obsahuje částice, které se pohybují pomocí přeskoků mezi buňkami mřížky $\mathbb{L}$. V naší práci považujeme čas za diskrétní veličinu, přesun částic tedy probíhá po jednotlivých krocích. Pohyb částic je popsán pravděpodobností přeskoku z buňky x do buňky y: $w(x \to y) = \Pr[x \to y | S_{(x)}]$, kde $S_{(x)}$ označuje stav blízkého okolí buňky x. Stav sytému v čase t je dán vektorem $\vec{\eta}_t = (\eta_t(x))_{x \in \mathbb{L}}$, kde $\eta_t(x)$ označuje počet částic v buňce x a čase t. Množinu všech přípustných stavů nazýváme stavový prostor a označujeme ho X. V celém článku očíslujeme stavy z X přirozenými čísly $0, 1, 2 \ldots |X| - 1$.

Cílem zkoumání konkrétního IPS je najít stacionární stav systému, tj. stav, ve kterém již došlo k ustálení pravděpodobnostního rozdělení. Pro naše účely budeme uvažovat pouze takové IPS, kde lze pohyb ve stavovém prostoru označit jako tzv. *markovský proces*.

Definice 1 *Buď* $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *náhodný proces. Potom ho nazýváme markovským, pokud*

$$\Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i; \eta_{n-1} = i_{n-1}; \ldots; \eta_0 = i_0] = \Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i].$$

To znamená, že pravděpodobnostní rozdělení v čase $n+1$ závisí pouze na stavu v čase n.

Definice 2 *Markovský proces je homogenní právě tehdy, když*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \Pr[\eta_{n+1} = j | \eta_n = i] = \Pr[\eta_1 = j | \eta_0 = i] =: p_{ij}.$$

Maticí P rozumíme takovou matici, která obsahuje prvky z definice 2. Nazýváme ji *matice přechodu*.

Pravděpodobností rozdělení na stavovém prostoru X v čase n popíšeme vektorem $\vec{\pi}_n$, jehož prvky jsou dány vztahem $\pi_n(i) = \Pr[\eta_n = i]$. Bez důkazu uvádíme následující větu:

Věta 1 *Buď* $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *homogenní markovský proces. Potom*

$$\vec{\pi}_{n+1} = P^T \vec{\pi}_n = (P^T)^{n+1} \vec{\pi}_0.$$

Známe-li počáteční stav systému, můžeme na základě této věty určit pravděpodobnostní rozdělení v libovolném čase.

Nyní můžeme na základě věty 1 definovat stacionární stav.

Definice 3 *Vektor* $\vec{\pi}$ *je stacionárním řešením markovského procesu právě tehdy, když*

$$\vec{\pi} = P^T \vec{\pi}. \tag{1}$$

Ekvivalentně můžeme stacionární řešení za jistých předpokladů[1] určit limitou $\pi(j) = \lim_{n\to+\infty} \pi_n(j)$.

2 Konkrétní model

2.1 Popis modelu

Zvolili jsme totálně asymetrický vylučovací model na jednorozměrné lineární mřížce s periodickými okrajovými podmínkami. Tři částice se tedy pohybují v šesti buňkách uspořádaných pouze v jednom směru a v každé z buněk se může v daném čase vyskytovat nejvýše jedna částice – tím říkáme, že $\eta_n(x) \in \{0, 1\}$. Částice se v mřížce pohybují podle následujících pravidel:

- Pohyb částic se vyhodnocuje paralelně.
- Pokud je částice na pozici i a pozice $i+1 \mod 6$ je volná, přeskočí do ní s pravděpodobností p_i.
- Pokud je pozice $i+1 \mod 6$ obsazená a $i+2 \mod 6$ volná, přeskočí do druhé jmenované s pravděpodobností αp_i, kde $\alpha \in \langle 0; 1\rangle$.[2]
- Pokud by měly dvě částice skočit na stejnou pozici, vybere se náhodně jedna z nich.

Předtím, než začneme sestavovat matici, určíme pravděpodobnost přechodu z konfliktního stavu $\eta_n(i) = 1$, $\eta_n(i+1) = 1$, $\eta_n(i+2) = 0$, který pro jednoduchost označíme 110, do stavů 101 a 011. Pravděpodobnost $w(110 \to 101)$ je dána vztahem $a_i = p_{i+1}\left(1 - \frac{\alpha p_i}{2}\right)$ a pravděpodobnost $w(110 \to 011) = b_i = \alpha p_i \left(1 - \frac{p_{i+1}}{2}\right)$.

Stavový prostor má $|X| = \binom{6}{3} = 20$ stavů. Matice přechodu má tedy rozměry 20×20 a obsahuje velký počet nulových prvků, takže bylo možné sestavit ji bez využití počítače. Z důvodu úspory místa zde matici neuvádíme celou. Pro ilustraci předkládáme jeden řádek matice s vynecháním nul v tabulce 1, kde jsme použili zkrácený zápis $q_i = 1 - p_i$, $c_i = 1 - a_i - b_i$.

[1] Nerozložitelný Markovův řetězec se všemi trvalými a nenulovými stavy.

[2] V dalším textu budeme pro zjednodušení zápis pomocí modulo vynechávat.

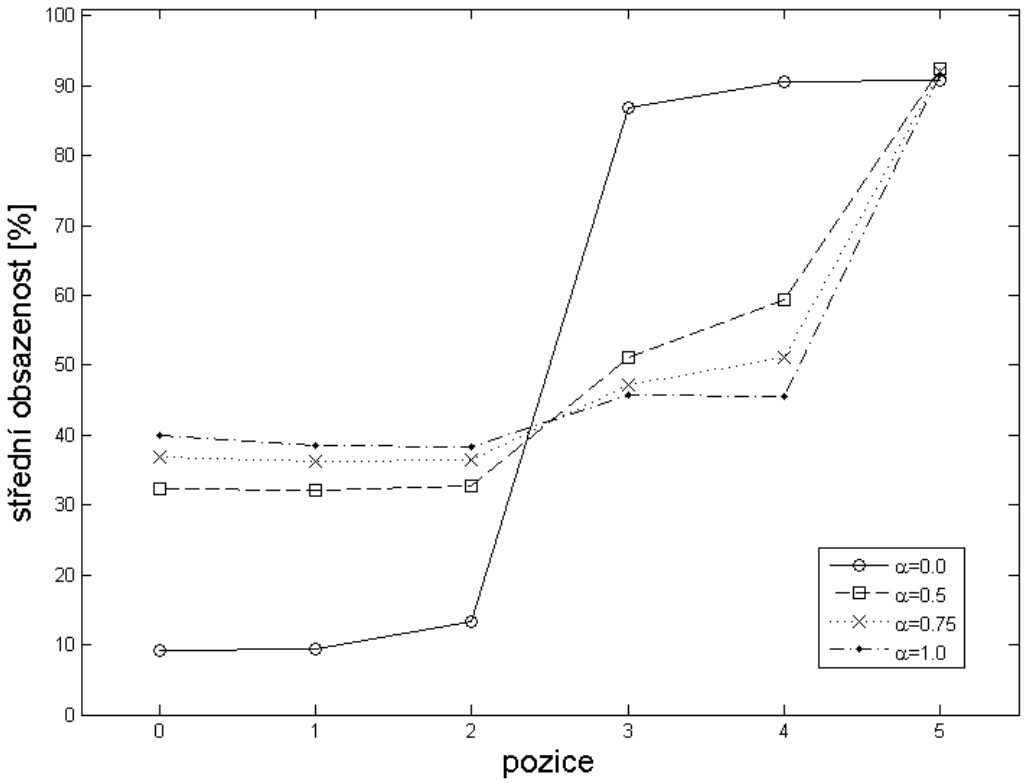
	011100	110100	110010	011010	101100	101010
110100	b_0q_3	c_0q_3	c_0p_3	b_0p_3	a_0q_3	a_0p_3

Tabulka 1: Nenulové pravděpodobnosti přechodů ze stavu 110100.

2.2 Stacionární řešení a hustotní profil

Stacionární řešení výše popsaného modelu jsme hledali na základě rovnice 1 v prostředí programu MATLAB pro zvolené parametry. Ty jsme volili tak, aby bylo možné model v prvním přiblížení interpretovat jako pohyb chodců. Výsledek každé simulace byl hustotní profil, který definujeme jako vektor $\vec{\rho}$, jehož složky jsou určeny vztahem $\rho(i) = \sum_{\eta \in X} \eta(i)\vec{\pi}(\eta)$. Jedná se vlastně o střední hodnotu obsazenosti dané buňky.

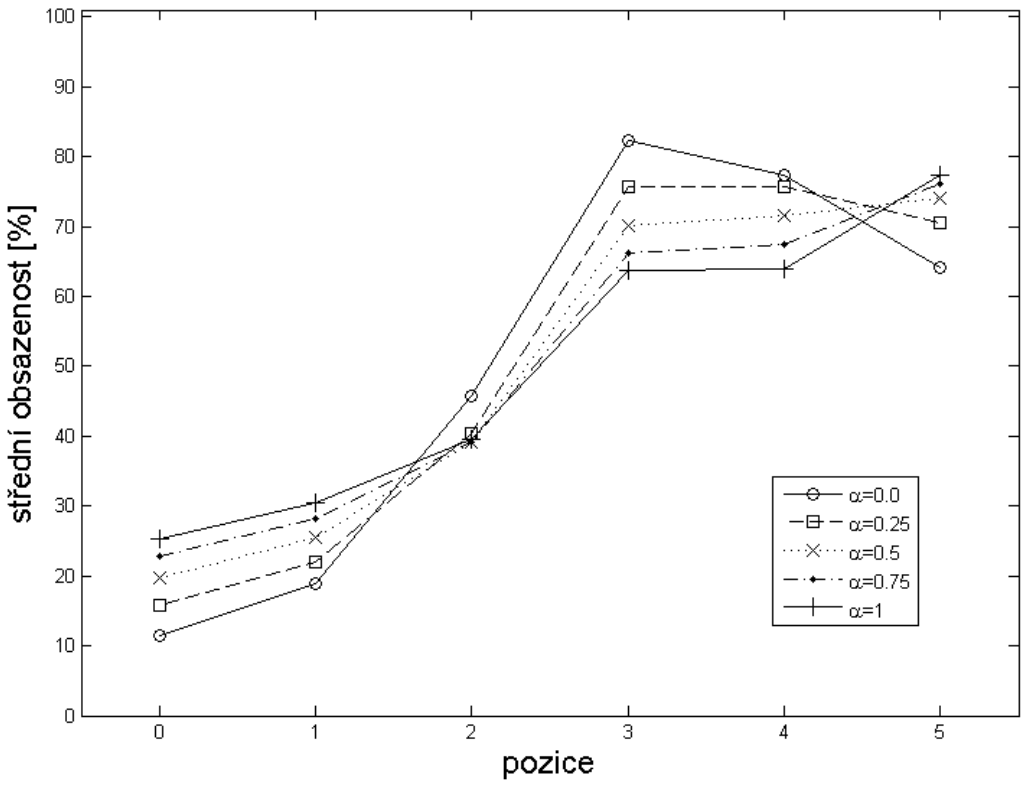
V první sadě parametrů jsme jednu z pravděpodobností, konkrétně p_5, nastavili velmi nízkou, což můžeme interpretovat jako zúžení, kterým chodci nemohou procházet příliš rychle. Studovali jsme změnu hustotního profilu v závislosti na parametru α – ten lze v rámci interpretace považovat za agresivitu chodců. Výsledky jsou vyneseny v grafu 1.



Graf 1: Hustotní profil s pravděpodobnostmi $p_i = 0,5$ pro $i \in 0, 1, 2, 3, 4$ a $p_5 = 0,05$.

V dalším pokusu jsme zafixovali hodnotu $\alpha = 0,5$ a měnili jsme pouze sílu bariéry, tj. hodnotu pravděpodobnosti p_5. Hustotní profil s rostoucí sílou bariéry prudce rostl směrem k této bariéře, což odpovídá skutečnosti, že se částice před zábranou hromadí.

Poslední konfigurace parametrů měla představovat zužující se průchod – pravděpodobnost přechodu z buněk s vyšším pořadovým číslem postupně klesala. Opět jsme sledovali závislost hustotního profilu na α, jak znázorňuje graf 2.



Graf 2: Hustotní profil s pravděpodobnostmi $p_i = 0,6 - 0,1i$.

3 Diskuse a závěr

Výsledky obou simulací souhlasí s intuitivními předpoklady. V prvním případě se pro $\alpha = 0,0$ částice nahromadily před bariérou, což vedlo k snížení hustoty v buňkách 0, 1 a 2. Se zvyšující se hodnotou α se hustota v buňkách 3 a 4 snížila na úkor buněk 0, 1 a 2, což představuje zkrácení fronty v důsledku zvýšené agresivity chodců. Buňka 5 zůstává stále stejně frekventovaná.

V druhém případě se pro nulovou možnost přeskoku vytvoří fronta, kterou poslední částice s velmi malou pravděpodobností opustí, zatímco nové částice přichází do fronty s větší pravděpodobností. S rostoucí hodnotou α mohou blokované částice snáze přeskakovat a hustotní profil se tak přibližuje lineárnímu růstu, což odpovídá lineárnímu poklesu pravděpodobností p_i.

Výsledky ukazují, že i na základě velmi jednoduchého modelu lze dospět k závěrům, které zhruba odpovídají reálnému chování davu.

Poděkování

Na prvním místě bychom chtěli poděkovat Pavlu Hrabákovi, garantovi našeho projektu, za konzultace a výpomoc při realizaci naší práce. Děkujeme taktéž FJFI ČVUT v Praze a organizátorům Týdne vědy, kteří nám umožnili na tomto projektu pracovat.

Reference

[1] Z. Prášková, P. Lachout. *Základy náhodných procesů*. Praha: Karolinum, 1998.