Dimenze iteračních fraktálů

Ondřej Jeřábek, Ivana Krumlová, Michal Martinek, Martin Scheubrein

Gymnázium Jiřího z Poděbrad, Poděbrady
Gymnázium, Brno, tř. Kpt. Jaroše 14, Brno
Gymnázium Havířov-Podlesí
Gymnátium Třebíč, Třebíč

ondrejjerabek@gmail.com
ivca.krumlova@gmail.com
martinek8@gmail.com
m.sche@seznam.cz

Abstrakt

Fraktály jsou objekty, které jsou v jistém smyslu nekonečné a nelze jim jednoznačně přiřadit celočíselnou dimenzi, jak je tomu možné u jednodušších tvarů, jako je úsečka, kruh nebo krychle. Je ale možné vypočítat jejich dimenzi jako reálné číslo. Tato práce je zaměřena na fraktály iterační, které vznikají pomocí stále se opakujícího rekurzivního algoritmu a jejichž dimenzi lze spočítat zcela přesně a jednoduše. Spočítáme dimenzi Kochovy křivky, Sierpinského trojúhelníku a dalších známých fraktálů.

1 Úvod

Fraktály jsou obrazce, které v různých měřítkách vykazují stále stejné vzory – fraktály jsou *soběpodobné*. Jedním ze způsobů, jak fraktály generovat, jsou tzv. *iterační systémy (IFS)*. Na základní, jednoduchý obrazec se rekurzivně donekonečna aplikuje určité transformační pravidlo. Obrazec se tím stává nekonečně složitým. Lze mu však přidělit reálnou dimenzi, což je mimo jiné úkolem této práce.

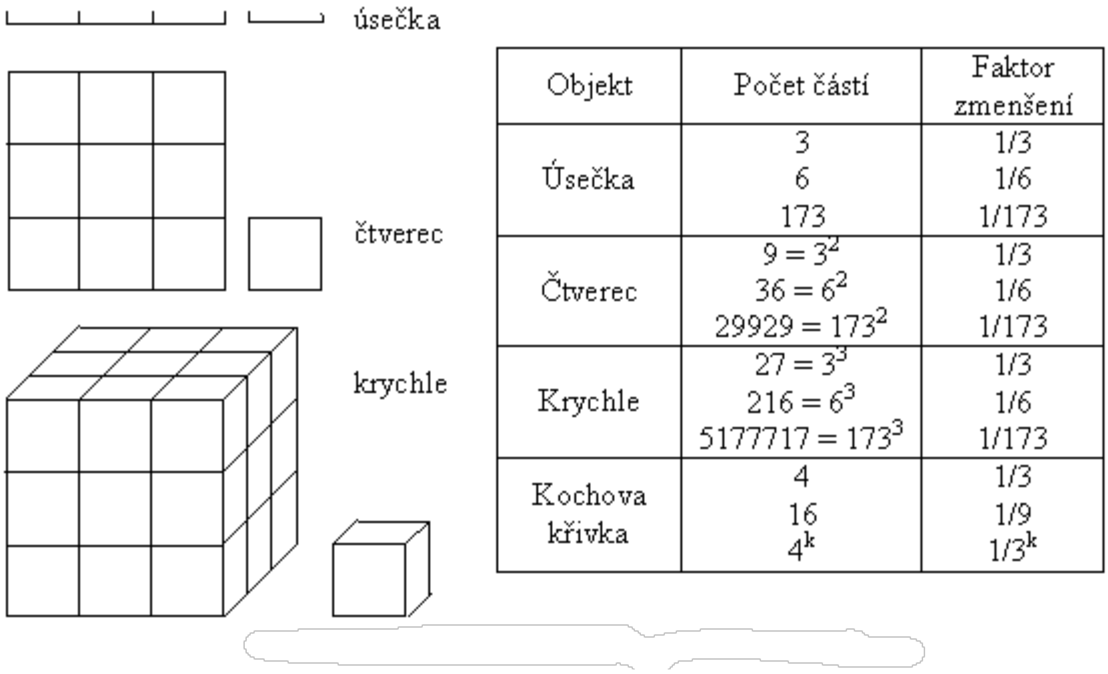
Iterační systémy

Iterační systémy či *systémy iterovaných funkcí* jsou jednou z nejběžnějších metod generování fraktálů. Spočívají v opakované aplikaci jednoduchého transformačního pravidla, obyčejně zmenšení a rotace či posuv, na výchozí obrazec a rekurzivním voláním tohoto pravidla na nově vzniklé vzory. Fraktál se tím vykresluje do stále jemnějších detailů ve stále menším měřítku. Předpis tohoto pravidla říká, které části stávajícího vzoru se mají vyjmout a nahradit pozměněnými kopiemi celku.

Dimenze fraktálů

Pomocí fraktální dimenze lze jednoduše popsat složitost fraktálů [1]. Ke zjištění dimenze je možné použít několika metod – soběpodobnostní dimenze, která vychází z opakování podobných tvarů ve fraktálu, mřížková dimenze, která používá rozdělení oblasti, kde fraktál leží, na čtverce, a Hausdorfova dimenze, která využívá rozdělení R^n na velmi malé podmnožiny.

2 Metodika



Objekt	Počet částí	Faktor zmenšení
Úsečka	3 6 173	1/3 1/6 1/173
Čtverec	$9 = 3^2$ $36 = 6^2$ $29929 = 173^2$	1/3 1/6 1/173
Krychle	$27 = 3^3$ $216 = 6^3$ $5177717 = 173^3$	1/3 1/6 1/173
Kochova křivka	4 16 4^k	1/3 1/9 $1/3^k$

Obrázek 1: Princip určování soběpodobnostní dimenze

Ke zjišťování dimenze fraktálů byla použita soběpodobnostní dimenze. Z obrázku (*obr.*1) (převzato z [1]) vyplývá, že mezi počtem částí a a faktorem zmenšení s existuje vztah $a = \frac{1}{s^D}$, kde D je dimenze objektu. Po vyjádření D z něj vyplývá vztah $D = -\frac{\log(n)}{\log(s)}$. Takto lze vypočítat dimenzi všech iteračních fraktálů.

Fraktály byly zobrazovány pomocí programovacího jazyka Asymptote, ve kterém byly vytvářeny algoritmy používající rekurzivní funkce, které opakovaně vykreslovaly tytéž tvary s pozměněnou orientací a velikostí.

3 Výsledky

Kochova křivka (*obr.*2) vzniká z původní úsečky vyjmutím její střední třetiny a nahrazením dvěma úsečkami o délce odpovídající třetině délky úsečky původní, které svírají úhel 60°. Její dimenze je rovna 1, 262. Jelikož stále jde o lomenou čáru, byť je nekonečně dlouhá, její dimenze se stále spíše blíží dimenzi 1.

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,262$$

Sierpinského trojúhelník (*obr.*3) vzniká rozdělením původního rovnostranného trojúhelníku na čtyři menší a odebráním prostředního z nich. Algoritmus je rekurzivně aplikován na zbývající tři. Dimenze Sierpinského trojúhelníku je $1,585$. Tento tvar se svou dimenzí již přibližuje dvourozměrnému obrazci.

$$D = -\frac{\log(3)}{\log(\frac{1}{2})} = 1,585$$

Sierpinského koberec (*obr.*4) je vytvořen z původního čtverce odebráním prostředního čtverce o hraně s třetinovou délkou oproti původnímu čtverci a rekurzí tohoto algoritmu na zbylých osm menších čtverců. Vzniká tak obrazec s nekonečně malou plochou. Ačkoli je Sierpinského koberec vzkreslen podobným algoritmem jako Sierpinského trojúhelník, jeho dimenze je výrazně vyšší – $1,893$ – blíží se tedy více ploše než křivce.

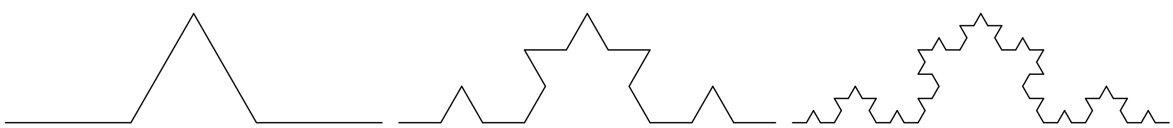
$$D = -\frac{\log(8)}{\log(\frac{1}{3})} = 1,893$$

Dimenze rekurzivního kříže (*obr.*5), vytvořeného opakovaným překřížením úsečky kolmou úsečkou, je 2. Tvoří tedy plnohodnotný dvojrozměrný obrazec.

$$D = -\frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{2})} = 2$$

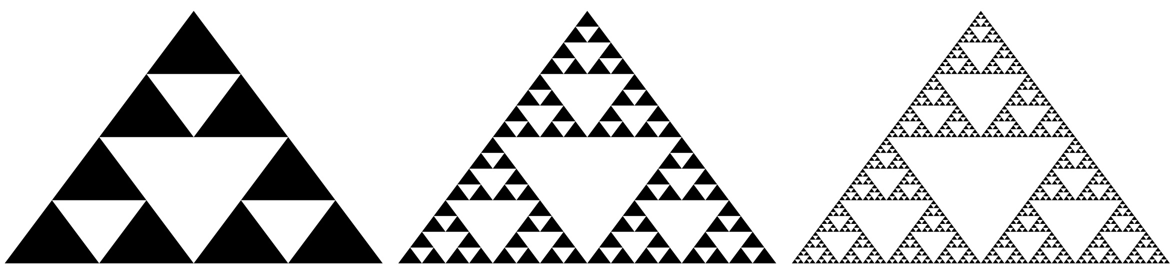
4 Shrnutí

Podařilo se pomocí jazyka Asymptote vytvořit algoritmy, které rekurzivními metodami vykreslují fraktální obrazce a povedllo se pro ně vypočítat jejich soběpodobnostní dimenzi. Srovnáním těchto dimenzí lze získat představu o strukturálním rozložení fraktálu.



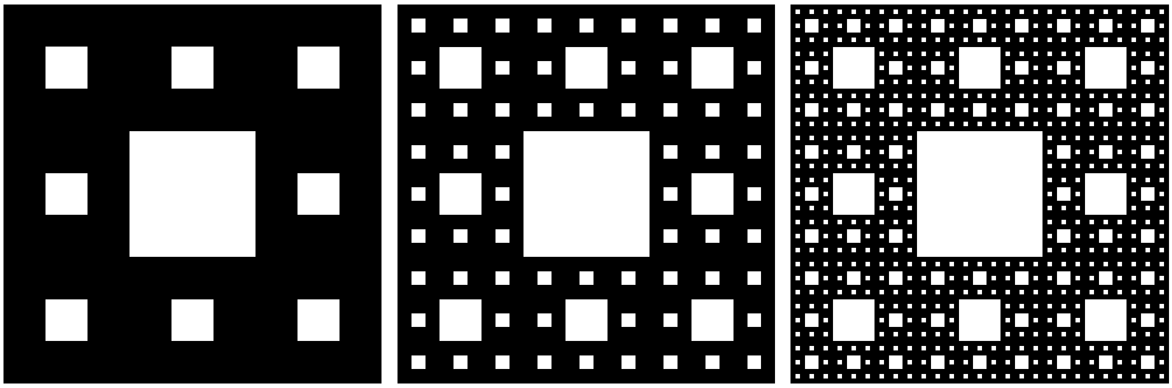
(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$

Obrázek 2: Kochova křivka



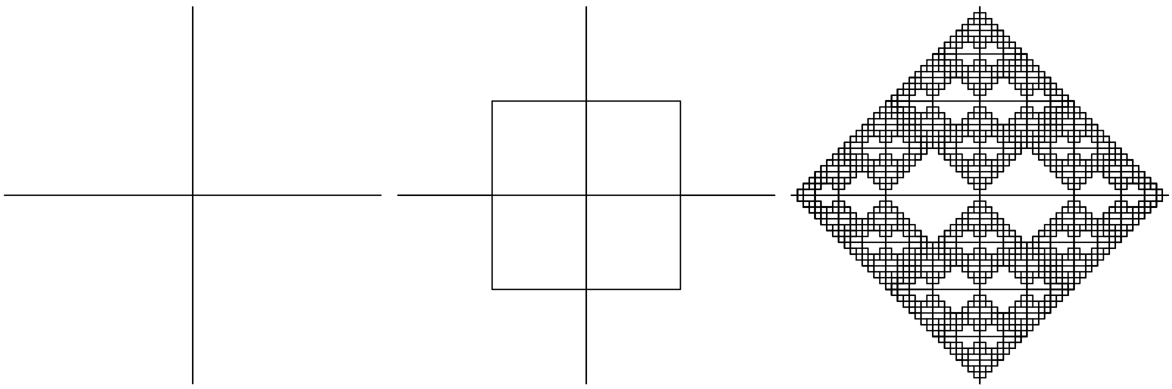
(a) $i = 2$ (b) $i = 4$ (c) $i = 6$

Obrázek 3: Sierpinského trojúhelník



(a) $i = 2$ (b) $i = 3$ (c) $i = 4$

Obrázek 4: Sierpinského koberec



(a) $i = 1$ (b) $i = 2$ (c) $i = 7$

Obrázek 5: Rekurzivní kříž

Poděkování

Děkujeme našemu supervisorovi Petru Paušovi za poutavé výklady a obětavou pomoc při řešení algoritmických problémů.

Reference

[1] P. Pauš. *Počítačové generování fraktálních množin.* 2004.

[2] H-O. Peitgen, H. Jürgens, D.Saupe. *Chaos and Fractals.* 1992.