

# Počítačová simulace turbulentního proudění

O. Bouček<sup>1</sup>, J. Hrubeš<sup>2</sup>, Z. Procházková<sup>3</sup>, J. Sláma<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Gymnázium Litoměřická, Litoměřická 726, Praha 9

<sup>2</sup> SPŠ SE Dukelská, Dukelská 13, České Budějovice

<sup>3</sup> Gymnázium Na Vítězné pláni, Na Vítězné pláni 1160, Praha 4

<sup>4</sup> Gymnázium Opatov, Konstantinova 1500, Praha 11

slama@fykos.cz

Supervizor: Ing. T. Oberhuber, Ph.D.

## Abstrakt

Cílem naší práce je simulace proudění nestlačitelných tekutin v závislosti na viskozitě, resp. rychlosti proudění a v různých prostředích. Provedeme simulace proudění v kavitě a oříznuté kavitě, vždy pro dvě různé rychlosti proudění, díky čemuž dosáhneme simulace laminárního i turbulentního proudění. Použijeme různé nastavení výpočetního modelu a na závěr naší práce výsledky porovnáme.

## 1 Úvod

Proudění tekutin je jev, se kterým se setkáváme denně a hlavně všude. Obtékání křídel je velmi důležitým pilířem moderního letectví, proudění vzduchu kolem karoserie auta ovlivňuje spotřebu paliva a proudění můžeme nalézt na mnoho dalších místech. Snahou v průmyslu, ale i vědě, je tato proudění pochopit a moci je využít k našemu prospěchu či snížit jejich vliv a nejznatelnější projev — odpor.

## 2 Teorie proudění tekutin

### Navierovy-Stokesovy rovnice

V teorii proudění tekutin se k popisu proudění používají Navierovy-Stokesovy rovnice. Tyto rovnice byly formulovány zhruba před 200 lety pány C.L. Navierem a G.G. Stokesem. I přes tak dlouhou dobu se je stále nepodařilo analyticky vyřešit, a tak se simulace proudění dělají numericky a často se užívá aproximací. Navierovy-Stokesovy rovnice jsou dvě [2],

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T} + \vec{F}, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \right) = -\rho \nabla \cdot \vec{v}. \quad (2)$$

Rovnice (1) vychází ze zákona zachování hybnosti, rovnice (2) vychází ze zákona zachování hmoty. Tyto rovnice jsou obecné a platí pro všechna podzvuková proudění. Numerická simulace je obecně velmi výpočetně náročná, proto se snažíme tyto výpočty co nejvíce zjednodušit. Proto se zjednodušují i Navierovy-Stokesovy rovnice. My jsme pracovali s nestlačitelnou kapalinou (vodou), a proto jsme použili zjednodušené rovnice pro nestlačitelné tekutiny [2]

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{F}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (4)$$

## Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo je bezrozměrná veličina, která udává charakter proudění. Zjistilo se totiž, že pro určitý poměr různých parametrů je výsledné proudění podobného charakteru. Tento poměr se tedy nazval jako Reynoldsovo číslo, pro nějž platí, že

$$Re = \frac{LV}{\nu} \quad (5)$$

kde  $L$  je délka profilu,  $V$  je velikost rychlosti tekutiny a  $\nu$  je viskozita. Proudění můžeme rozdělit na laminární a turbulentní, kde pro  $Re < 2300$  vzniká plně laminární proudění, pro  $Re > 4000$  vzniká plně turbulentní proudění a pro  $2300 < Re < 4000$  vzniká tzv. přechodné proudění, které je něco mezi tím.

## Princip simulace

Simulaci bychom mohli provádět pomocí Newtonových pohybových zákonů pro každou molekulu tekutiny zvlášť. Jenže počet potřebných výpočtů roste exponenciálně a už pro soubor o pár tisících molekul bychom nezvládli výpočty, neboť by jich bylo příliš mnoho. Proto se výpočty dělají na makro úrovni. Prostor, který chceme simulovat, se pokryje mřížkou (viz Obr. 5) — ať už pravidelnou či nepravidelnou — a zavede se zjednodušení, že tlak i rychlost je v každé buňce konstantní v daném okamžiku. Dále platí, že to, co do buňky vteče, musí vytéct. Simulace se provádí s určitým malým časovým krokem. Hustota mřížky a časový krok se musí zvolit tak, aby se změna nerozšířila dál než o jednu buňku. Hustota mřížky velmi silně ovlivňuje výsledky simulace (viz Obr. 4). Pokud je mřížka příliš málo hustá, simulace zachytí málo detailů. Pokud je naopak příliš hustá, může dojít k znehodnocení simulace a vypočtení nesmyslných výsledků (viz Obr. 4c).

## Naše simulace

Simulovali jsme pohyb kapaliny v kavitě a pohyb v kavitě s vyříznutým rohem. Výpočty jsme prováděli pomocí opensource programu OpenFOAM, výsledky jsme zobrazovali programem VisIt. Pozorovali jsme, jak se změní charakter proudění, jestliže změníme hodnotu viskozity kapaliny nebo jemnost použité mřížky. Kavita i oříznutá kavita měly rozměry 0,1 m x 0,1 m. V obou kavitách byla provedena simulace pro  $Re = 10^2$  a  $Re = 10^5$ .

## Výsledky

Na výsledcích z kavit je vidět barevná mapa, která udává velikost rychlosti tekutiny v daném bodě, a šipky, které udávají směr rychlosti tekutiny.

Na Obr. 1 vidíme časový vývoj proudění v oříznuté kavitě pro  $Re = 10^5$ . Vidíme, že při  $Re = 10^5$  je vzniklé proudění plně turbulentní a můžeme pozorovat vývoj turbulencí v prvních pěti vteřinách simulace.

Na Obr. 2 můžeme pozorovat proudění v kavitě při  $Re = 10^2$  (vlevo) a  $Re = 10^5$  (vpravo). Vidíme, že při malém Reynoldsově čísle došlo velmi rychle k ustálení proudění, kdežto při vysokém Reynoldsově čísle vzniklo turbulentní proudění.

Na Obr. 3 můžeme porovnat proudění tekutiny v oříznuté kavitě, opět pro  $Re = 10^2$  (vlevo) a  $Re = 10^5$  (vpravo). Vidíme, že pro malé Reynoldsovo číslo dostáváme velice podobný výsledek jako v normální kavitě, ale pro velké Reynoldsovo číslo opět vzniká plně turbulentní proudění a můžeme pozorovat dvě hlavní turbulence — jednu ve spodní části a druhou v horní části kavity.

Na Obr. 4 vidíme porovnání výsledků v závislosti na hustotě mřížky. Obrázek 4a má nejméně hustou mřížku a dodává tedy nejméně detailní výsledek, obrázek 4b má správně hustou mřížku a dává přesnější výsledek, kdežto obrázek 4c má již příliš jemnou mřížku, a proto je spočtený výsledek fyzikálně naprosto nesmyslný.

## 3 Shrnutí

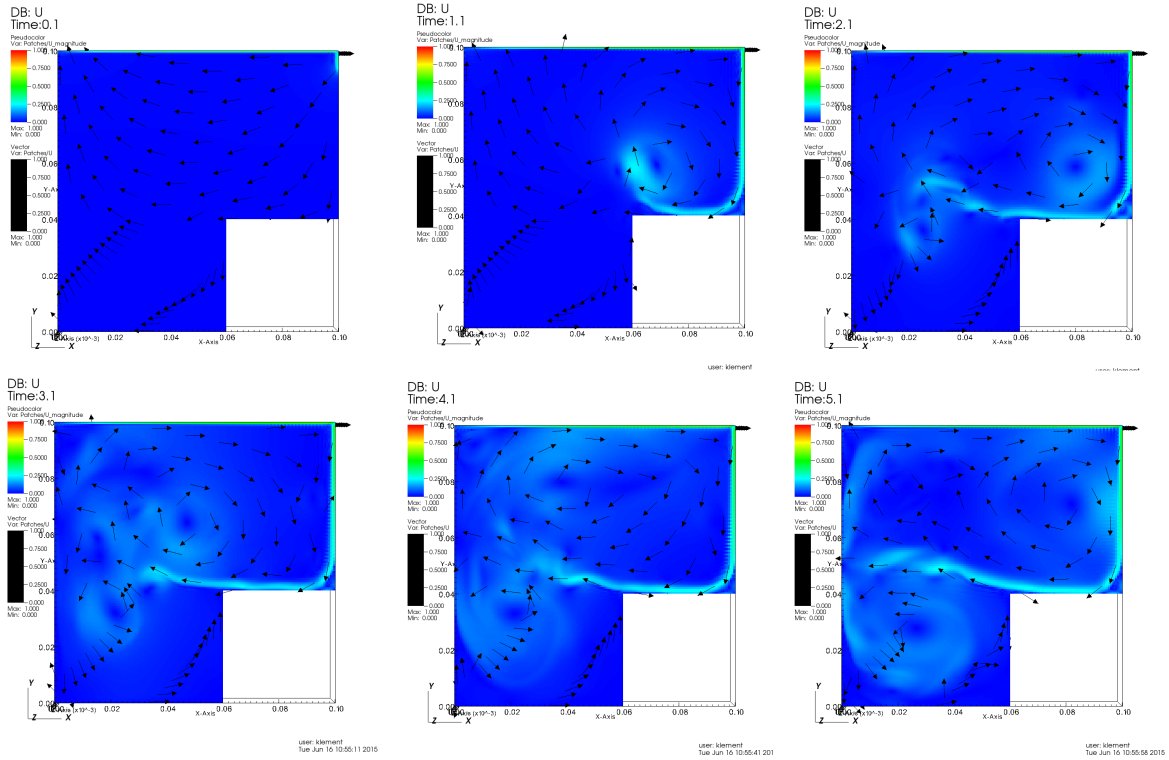
Simulací pro různá Reynoldsova čísla jsme dospěli k závěru, že pro malá Reynoldsova čísla se proudění ustálí, většinou v relativně krátkém čase a naopak pro vysoká Reynoldsova čísla vzniká proudění turbulentní. Vzniklé turbulentní proudění je tím víc turbulentní, čím víc nepravidelná je kavita, v níž k proudění dochází. Při simulaci se nám povedlo získat fyzikálně nesmyslný výsledek, z důvodu nevhodné (nerovnoměrně zahuštěné) mřížky (viz Obr. 5).

## Poděkování

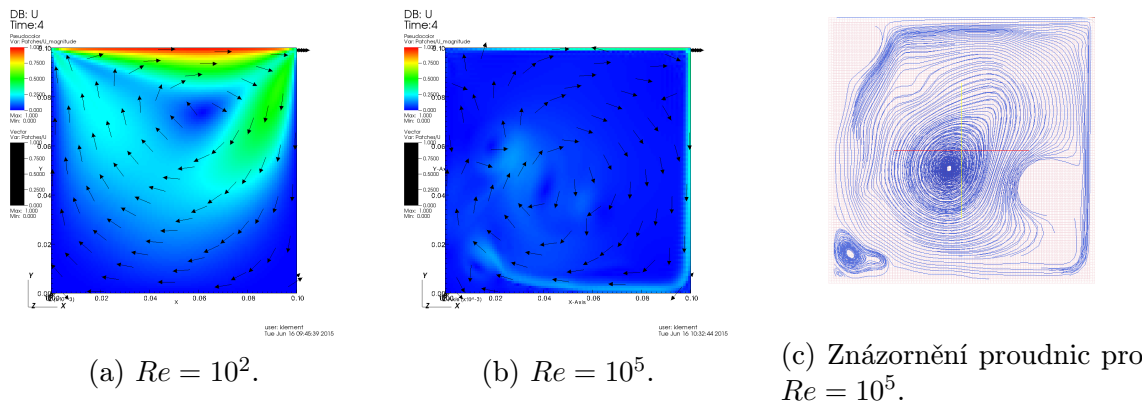
Chtěli bychom poděkovat našemu supervizerovi Ing. Tomáši Oberhuberovi, Ph.D. za teoretický úvod do problému a doktorandům Ing. Ondřeji Pártlovi a Ing. Vladimíru Klementovi za pomoc při provádění simulací a analýze výsledků.

## Reference

- [1] Tutoriál k programu OpenFOAM (Červen 2015)  
URL: <http://cfd.direct/openfoam/user-guide/tutorials/>
- [2] J.H. Ferziger, M. Perić, Computational Methods for Fluid Dynamics, 3. vydání, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002



Obrázek 1: Časový vývoj proudění v oříznuté kavitě při  $Re = 10^5$ .

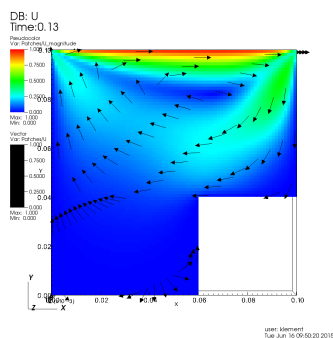


(a)  $Re = 10^2$ .

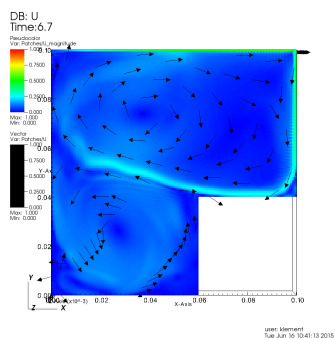
(b)  $Re = 10^5$ .

(c) Znázornění proudnic pro  $Re = 10^5$ .

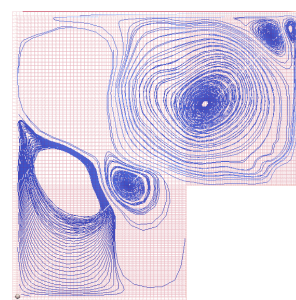
Obrázek 2: Porovnání proudění v kavitě pro různé Reynoldsova čísla.



(a)  $Re = 10^2$ .

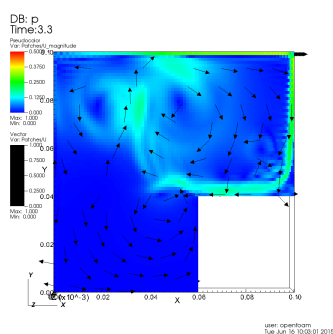


(b)  $Re = 10^5$ .

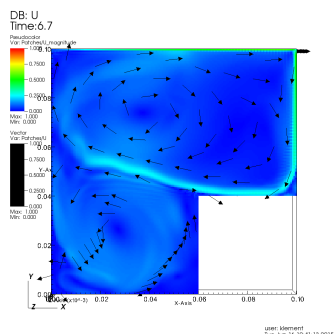


(c) Znárodnění proudnic pro  $Re = 10^5$ .

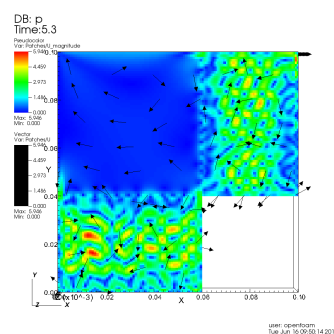
Obrázek 3: Porovnání proudění v ořznuté kavitě pro různá Reynoldsova čísla.



(a) Mřížka 84x84.

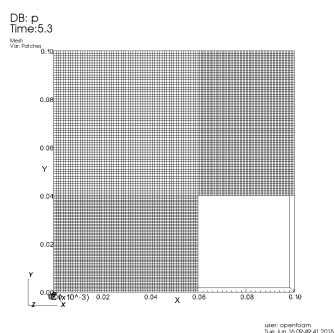


(b) Mřížka 96x96.



(c) Mřížka 139x139.

Obrázek 4: Porovnání výsledků simulace pro různé hustoty mřížek.



Obrázek 5: Nerovnoměrně zahuštěná mřížka, při níž bylo dosaženo fyzikálně nesmyslného výsledku.