Opilcova procházka a Galtonova deska

Jiří Jičínský, Gymnázium Třebíč,Masarykovo nám. 9/116, Třebíč, jirijicinsky@seznam.cz

Michal Jelínek, Gymnázium Elišky Krásnohorské, Ohradní 55, Praha 4, miki.29@seznam.cz

Tomáš Sláma, Gymnázium Turnov, Jana Palacha 804, Turnov, tomas.slama.131@gmail.com

Abstrakt

Studovali jsme experimentální realizaci náhodné procházky pomocí Galtonovy desky. Jako praktickou část jsme zjišťovali, jestli naše Galtonova deska odpovídá teorii a řídí se binomickým rozdělením. Experiment jsme realizovali házením kuliček do Galtonovy desky a následným ověřením správnosti naší hypotézy. Hypotézu o binomickém rozdělení jsme na základě naměřených hodnot zamítli.

1 Úvod

Náhodnou procházku si lze představit jako určité zjednodušení jevů běžně pozorovatelných například v chemii a ve fyzice. Jedná se o proces, při kterém se objekt v každém kroku vydá doleva nebo doprava s určitou pravděpodobností. Pro jednoduchost uvažujeme, že kroky jsou stejně velké a objekt se pohybuje po přímce. Pravděpodobnost nalezení objektu v určité vzdálenosti od počátku vede na takzvané binomické rozdělení. Jednoduché experimentální znázornění binomického rozdělení u této procházky představuje Galtonova deska. Tato deska ale popisuje pouze proces, kdy se objekt posouvá doprava nebo doleva se stejnou pravděpodobností.

Galtonova deska na katedře fyziky na první pohled splňovala binomické rozdělení pro menší data, nikdo však neověřoval hypotézu o binomickém rozdělení z pohledu statistiky.

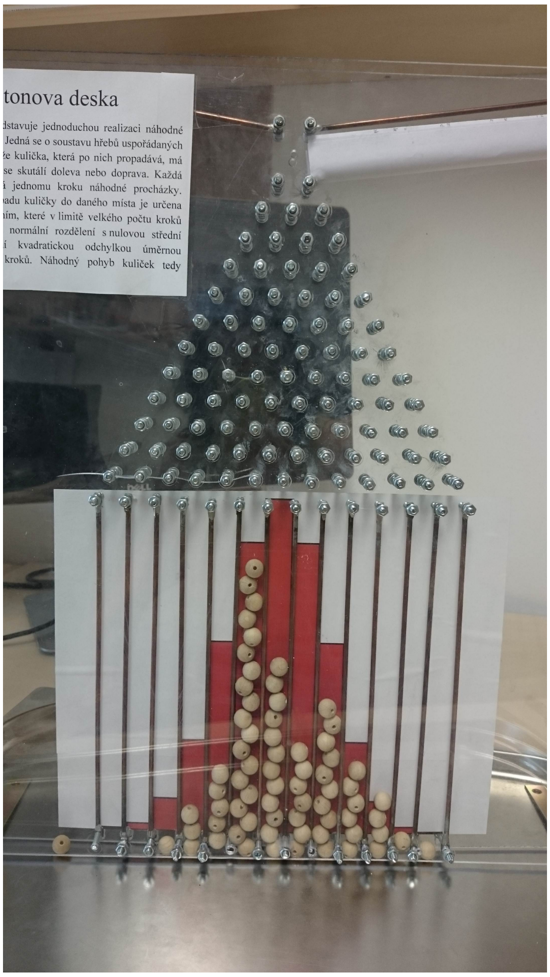
2 Galtonova deska

Studovaná Galtonova deska se skládá ze dvou rovnoběžných plexiskel, mezi kterými se nacházi kolíčky. Každý kolíček simuluje proces rozhodování, zda jít doprava nebo doleva. Kolíčky jsou strukturované do tvaru rovnoramenného trojúhelníku. Počet hrotů v trojúhelníku se v každé následující úrovni zvýší o jeden. Počet úrovní v trojúhelníku odpovídá počtu kroků náhodné procházky. Naše galtonova deska má 12 úrovní a odpodá proto procháce o 12-ti krocích, jak je vidět na obrázku Obr. 1.

3 Binomické rozdělení pro Galtonovu desku

Obecně je binomické rozdělení definováno vztahem

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}, \tag{1}$$



Obrázek 1: Studovaná Galtonova deska odpovídá dvanácti krokům. Spodní přihrádky odpovídají vzdálenosti od počátku po dvanácti krocích. Tyto vzdálenosti jsou -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12.

kde $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ je takzvané kombinační číslo a vypočte se jako

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

a p je pravděpodobnost realizace například kroku doprava.

Dá se ukázat, že binomické rozdělení pro Galtonovu desku je dáno vztahem

$$P(d) = \begin{pmatrix} N \\ \frac{N+d}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2^N}, \tag{2}$$

kde N je celkový počet kroků, d je vzdálenost od počátku a pravděpodobnost p ze vztahu (1) je $1/2$. Toto rozdělení tedy dává pravděpodobnost nalezení chodce ve vzdálenosti d od počátku. Pro naši desku je $N = 12$.

4 χ^2 test dobré shody

Jedná se o statistický test, kterým ověříme, zda se naše Galtonova deska řídí binomickým rozdělením. Je založen na porovnání naměřených a teoretický předpovězených dat.

Ověřujeme platnost nulové hypotézy H_0 oproti alternativní hypotéze H_a, k tomu se vypočte hodnota

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(merena_i - predpovezena_i)^2}{predpovezena_i} \tag{3}$$

a porovná se se s kritickou hodnotou pro dané parametry, které specifikujeme později. Pokud hodnota získaná pomocí vztahu (3) je větší než kritická hodnota, pak hypotézu H_0 zamítáme.

5 Naměřená data a testování shody

Opakovaně jsme do Galtonovy desky házeli kuličky a zapisovali počet kuliček v každé přihrádce. Počet opakování jsme volili tak, abychom splnili požadavky testu dobré shody, kdy v 80% přihrádek musí být teoretická četnost kuliček větší než 5. Testujeme hypotézu H_0 oproti alternativní H_a.

H_0 : Galtonova deska se řídí binomickým rozdělením s pravděpodobností $p = 1/2$.
H_1 : Galtonova deska se takovým rozdělením neřídí.

V následují tabulce a grafu Obr. 5 jsou uvedeny vypočtené a naměřené hodnoty včetně sčítanců pro χ^2 test z rovnice (3).

pozice	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	suma
měřená	5	20	51	140	212	383	363	235	265	134	81	19	6	1914
předpovězená	0,5	5,6	30,8	102,8	231,3	370,1	432,1	370,1	231,3	102,8	30,8	5,6	0,5	1914
χ^2	44,0	36,9	13,2	13,5	1,6	0,5	11,0	49,3	4,9	9,5	81,6	32,0	65,5	**363,3**

Z tabulky vidíme, že hodnota χ^2 funkce je

$$\chi^2 = 363,3.$$

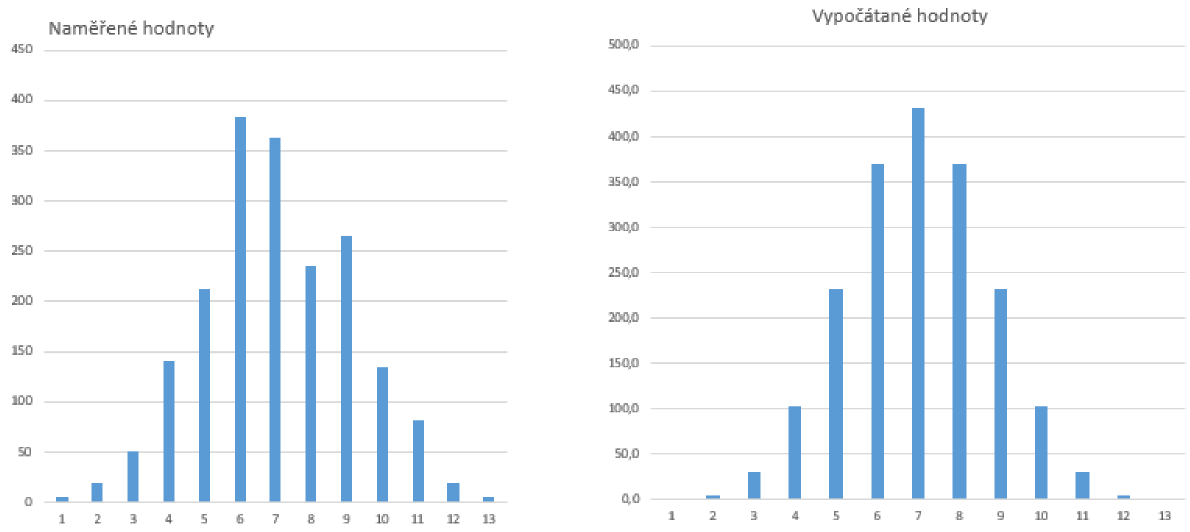
Tuto hodnotu porovnáme s kritickou hodnotou ze statistických tabulek, které jsou běžně dostupné na internetu. V tabulkách zvolíme standartní hladinu významnosti $0,05$ a počet stupňů volnosti je 12. Počet stupňů volnosti je roven počtu přihrádek v Galtonově desce minus 1. Za těchto předpokladů je kritická hodnota

$$\chi^2_{crit} = 21,026.$$

Jelikož je $\chi^2_{crit} > \chi^2$ tak nulovou hypotézu o binomickém rozdělení s pravděpodobností 1/2 zamítáme.

6 Shrnutí

Provedli jsme experiment s házením kuliček do naší Galtonovy desky. Následně jsme pomocí statistického testu ověřili, zda se o desce dá říci, že popisuje náhodnou procházku s binomickým rozdělením. Pro ověření jsme použili test dobré shody, jehož hodnota vyšla mnohem větší, než je kritická hodnota pro nezamítnutí nulové hypotézy. Experiment tedy ukázal, že naše Galtonova deska v žádném případě nesplňuje binomické rozdělení s pravděpodobností $p = 1/2$. Tento výsledek může být způsoben nepřesnostmi při výrobě



Obrázek 2: Porovnání naměřených a teoreticky předpovězených hodnot pro Galtonovu desku po 1914 pokusech.

desky, přílišnou startovní rychlostí kuliček nebo malým počtem opakování. Vzhledem k tomu, že hodnota χ^2 v rovnici (3) s rostoucím počtem pokusů rostla, přikláníme se spíše k názoru, že větší počet pokusů by binomické rozdělení nepotvrdil a chyba bude na straně konstrukce desky.

Poděkování

Děkujeme za skvělé konzultace Ivě Bezděkové.